El método de Monte Carlo

Luis Cruz Kuri[1], Jorge Sergio Durand Niconoff[1]
y R. Romero Patiño[2]

Introducción

El método de Monte Carlo proporciona soluciones aproximadas a una variedad de problemas matemáticos mediante la ejecución por computadora de experimentos de muestreo estadístico. El método es aplicable tanto a problemas sin contenido probabilista, es decir, deterministas, como a aquellos que tienen inherente una estructura probabilista. Aquí se presentará una breve excursión histórica sobre científicos y estudiosos que de alguna manera han participado en el desarrollo de estas técnicas. A continuación se darán algunos ejemplos de aplicación a situaciones de la vida cotidiana, como son los fondos para la jubilación y los modelos para describir procesos de cáncer y otros, todo ello con la finalidad de ilustrar los campos tan variados en los que el método de Monte Carlo puede contribuir.

Breve historia del método de Monte Carlo

El método se llama así por alusión a la ciudad y principado de Mónaco y toda vez que una ruleta, símbolo de ese lugar, constituye un generador simple de números aleatorios. La acuñación de este nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Monte Carlo data de alrededor de 1944; no obstante, existen instancias aisladas y no desarrolladas en épocas mucho más tempranas. Por ejemplo, en la segunda mitad del siglo XIX varias personas realizaron experimentos consistentes en arrojar al azar una aguja para que cayera sobre un tablero dividido por líneas paralelas, con la intención de hacer inferencias acerca del famoso número Pi de la circunferencia (3.1416...) a partir de las observaciones de las frecuencias de traslape de la aguja con las líneas. Asmismo, se conoce un relato de cierto capitán Fox en los Estados Unidos, quien mientras convalecía de las heridas infligidas en la Guerra de Secesión de ese país realizó una determinación experimental del valor de Pi, enfrascándose en este juego como una manera de distraerse. Más adelante describiremos este tipo de experimentos, los cuales corresponden al llamado "problema de la aguja de Buffón". En 1899, Lord Rayleigh mostró que una caminata aleatoria unidimensional sin barreras absorbentes podía proporcionar una

El destacado científico ruso Andrei N. Kolmogorov (1903-1987), quien realizó importantes contribuciones a las matemáticas y dio inicio al enfoque axiomático de la teoría de la probabilidad.

[1] Instituto de Ciencias Básicas de la Universidad Veracruzana, Dr. Luis Castelazo Ayala s/n, Col. Industrial Ánimas, 91110, Xalapa, Ver., tel. 2288-125745.
[2] Colegio de Puebla, A. C.

El matemático húngaro Stanislaw Ulam (1909-1984) quien, entre otras actividades, trabajó en el proyecto de la bomba atómica.

solución aproximada a una ecuación diferencial parabólica. Kolmogorov, en 1931, mostró la relación entre los procesos estocásticos de Markov y ciertas ecuaciones íntegro-diferenciales.

A principios del siglo XX, las escuelas estadísticas británicas se consagraron a estudiar ciertos aspectos no muy desarrollados de los trabajos de Monte Carlo, primordialmente con fines didácticos y pocas veces de investigación. Al respecto, en cuanto a la investigación, se destaca aquí el ahora famosísimo nombre de "Student" (seudónimo con el que escribió William S. Gosset). Es Gosset quien, trabajando como asesor estadístico para el control de calidad de procesos en la Cervecería Guiness, utilizó un muestreo experimental que lo llevó a descubrir la distribución del coeficiente de correlación y aumentar su fe en la tan ahora utilizada distribución t, la cual había derivado sirviéndose de análisis teóricos dudosos e incompletos.

El uso real de los métodos de Monte Carlo como una herramienta para la investigación parte del trabajo sobre la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial. Cuando Stanislaw Ulam estuvo en Los Álamos, desarrolló el método de Monte Carlo, el cual permitía la búsqueda de soluciones para problemas matemáticos mediante un procedimiento de muestreo estadístico con números aleatorios.

Este trabajo involucraba una simulación directa de los problemas probabilistas relativos a la difusión de neutrones en un material fisionable; pero aún en una fase temprana de estas investigaciones, von Neumann y Ulam refinaron los métodos de "ruleta rusa" y de "desmembramiento".

No obstante, el desarrollo sistemático de tales ideas tuvo que esperar el trabajo de Harris y Herman Kahn, realizado en 1948. Alrededor de ese año, E. Fermi, N. Metropolis y S. Ulam obtuvieron estimaciones mediante el método Monte Carlo de los valores característicos de la ecuación de Schrödinger.

Fue durante la guerra que cristalizó tal metodología básicamente debido a dos hechos. Por un lado, reunieron sus esfuerzos personajes como von Neumann, Fermi, Ulam y Metropolis en el proyecto "Manhattan" para caracterizar, utilizando muestreo estadístico, el transporte de radiación en la materia, específicamente la difusión y multiplicación de neutrones cuando viajan a través de un material fisionable, problema de gran interés para el diseño y fabricación de armas nucleares. Por otro lado, se contaba ya con un desarrollo incipiente de las computadoras digitales modernas, lo que permitió darle al muestreo estadístico un carácter práctico.

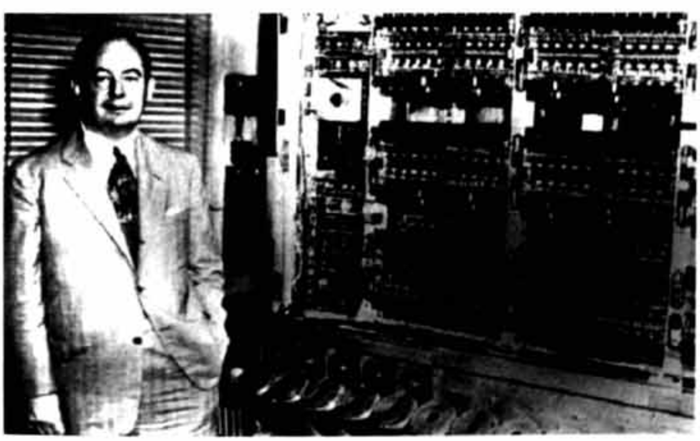
Cerca de 1970, la teoría en desarrollo de la complejidad computacional comenzó a proporcionar un fundamento más preciso y persuasivo a la utilización del método de Monte Carlo. La teoría identificó una clase de problemas para los cuales el tiempo para evaluar la solución exacta a un problema dentro de la clase crece cuando menos de manera exponencial con M, donde M es el número de componentes. La pregunta a ser resuelta era si el método de Monte Carlo podría estimar la solución a un problema en esta clase intratable dentro de unos límites especificados de precisión estadística en tiempo acotado por arriba por un polinomio en M. Hay numerosos ejemplos que apoyan esto. Karp, en 1985, mostró esta propiedad para estimar la fiabilidad de una red plana multiterminal con aristas que fallan de manera aleatoria. A su vez, Dyer estableció esto mismo en 1989 para estimar el volumen de un cuerpo convexo en un espacio euclidiano de dimensión M. Por su parte, Broder, en 1986, y Jerrum y Sinclair en 1988 afirmaron la propiedad para calcular el permanente de una matriz o, de manera equivalente, el número de concordancias perfectas en una gráfica bipartita.

Algunas aplicaciones de Monte Carlo

Pues bien, en la actualidad el desarrollo de las técnicas computacionales ha permitido, entre otras cosas, contar con herramientas cuyas aplicaciones se encuentran en áreas del conocimiento tales como la economía, la medicina, la biología, la física, la investigación operacional, las matemáticas en general y varias más. Una de tales herramientas la proporciona el método de Monte Carlo.

Aplicaciones en la medicina

En la medicina, por ejemplo, se pueden realizar simulaciones para entender cómo trabajan las drogas en los sistemas inmunológicos y metabólicos en el complejo sistema que es el cuerpo humano. En la segunda mitad de la década de los noventa algunas investigaciones realizadas sobre la enfermedad periodontal utilizando técnicas de simulación permitieron a un grupo de la corporación Entelos la aplicación de tales principios a otras enfermedades que abarcaban desde la diabetes hasta el asma. Se modelaron asimismo estados metabólicos e inmunológicos en el cuerpo; tan sólo para citar un ejemplo, la concentración de insulina en el tejido muscular representa una de las setecientas de tales variables consideradas en el modelo de la diabetes. Para verificar la validez del modelo, se realizaron más de trescientas pruebas, las cuales se compararon con los datos clínicos reales.



El matemático húngaro John Von Neumann con la primera computadora del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. (Archives Institute for Advanced Studies Princeton)

Para ello, un "paciente" virtual se toma una píldora, "tragándose" una descripción técnica detallada de una droga bajo investigación, la cual entonces se "metaboliza" dentro de los "órganos" digitales que están sirviendo como modelos que varían desde el páncreas, el hígado hasta el cerebro.

Monte Carlo en el tratamiento del cáncer

Por otra parte, en la terapia médica para eliminar un tumor canceroso se busca minimizar el daño que la radiación utilizada pudiera producir al tejido sano circundante. De nueva cuenta, ¿no cree el lector que es bueno contar con una herramienta que permite simular la terapia con un paciente virtual antes de hacerla con el real para determinar la dosis apropiada y evitarle una sobreexposición y daños a la parte sana?

Las aplicaciones médicas ocupan un buen lugar entre las aplicaciones de las reacciones nucleares. Por ejemplo, la terapia basada en la captura de neutrones por el boro se utiliza para eliminar tumores cancerosos. Consiste en inyectar al paciente con un isótopo, el boro-10, y después irradiarlo con neutrones. Debido a que el boro-10 se acumula preferentemente en las células cancerosas y que además tiene excelentes propiedades para capturar neutrones, la terapia mata selectivamente a las células del tumor canceroso.

En este caso, el método de Monte Carlo se emplea para determinar mediante una simulación la dosis adecuada de neutrones junto con el espectro de energía que se debe administrar para que se elimine al tumor y no al paciente.

Aplicaciones en la economía

La alta gerencia de una empresa debe decidir si un proyecto de inversión se debe instrumentar o no sobre la base del valor de la tasa de interés que determina una ganancia para la empresa. Esa tasa de interés depende en términos generales de diversas variables que se comportan aleatoriamente; por ejemplo, los gastos en un año (incluyendo costos de pérdida), la tasa efectiva del impuesto, el ingreso bruto en un año y demás.

El método de Monte Carlo se puede utilizar aquí para simular los valores de cada uno de estos parámetros y determinar una distribución de probabilidad para la tasa de ganancia. A partir de esta información, es posible tomar decisiones respecto de la puesta en operación del proyecto.

Monte Carlo en la planificación de inversiones

Si le preguntaran a usted si estaría dispuesto a invertir una buena suma de dinero en un proyecto de inversión a largo plazo, ¿le gustaría contar con una herramienta que le ayudara a tomar la decisión de invertir o no con base en un criterio de ganancia y sin necesidad de arriesgar nada inicialmente?

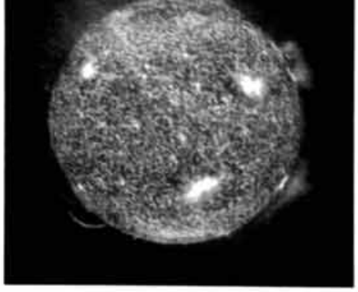
Es así que, tal como hemos visto, una técnica utilizada desde hace más de medio siglo para modelar las explosiones de las bombas atómicas —para citar solamente una de las situaciones más notorias— se ha convertido ahora en una herramienta para planear la jubilación.

Al respecto, tal y como aprende toda persona que se jubila, el fijar una tasa sostenible de gastos sufragados por el fondo es crucial para una seguridad financiera. El simple hecho de basar lo que se va a gastar en las estimaciones de un rendimiento promedio durante dos o tres décadas como jubilado, produce una tasa poco confiable de cómo hacer los retiros del fondo. Si las estimaciones de un candidato a la jubilación fallan tan sólo por una cantidad pequeña, podría quedarse sin dinero después. Lo que es aún peor, si el candidato se retira casi al momento en que la bolsa de valores entra en un periodo prolongado de picada, probablemente las ganancias de sus inversiones serán significativamente menores que lo que anticipaba, exponiéndose al riesgo de agotar sus ahorros.

Puesto que el riesgo de quedarse sin dinero demasiado pronto es inaceptable, muchos jubilados están siendo guiados por algo que podríamos reconocer como simulaciones de Monte Carlo. El objetivo es obtener la imagen lo más clara posible de cuánto es lo que pueden gastar en una forma segura.

Al igual que los científicos de Los Álamos, los estudiosos del problema de los jubilados programan las computadoras para crear combinaciones aleatorias de variables conocidas con la intención de encontrar los patrones que les permitan obtener las probabilidades de distintos resultados. Y precisamente de esta manera se trata de vislumbrar el futuro incierto y hacer planes para una jubilación que podría durar treinta años o más. Las simulaciones por Monte Carlo toman en consideración lo volátiles e impredecibles que son los mercados de las acciones y bonos. Algunas informaciones básicas, como serían la edad del candidato y el valor actual y composición de sus inversiones, se ingresan al programa junto con ciertos supuestos acerca del porvenir incierto, donde se incluyen datos tales como las tasas cambiantes de inflación, la esperanza de vida y los rendimientos de las inversiones. Se ejecuta entonces el programa para cientos o miles de combinaciones aleatorias, produciendo la respuesta más probable a la pregunta de cuánto se puede gastar en una forma segura.

Digamos que usted y su esposa se jubilan a la edad de 65 años con un portafolios de un millón de pesos invertido así: 60% en acciones de la bolsa, 30% en bonos y 10% en un fondo de dinero del mercado. Supongamos también, de manera conservadora, un rendimiento promedio anual del 6%. Si usted retira 5,000 pesos cada mes (es decir, 60,000 cada año) para sufragar sus gastos normales, podría presuponer que nunca se quedará sin dinero, sin importar cuánto tiempo viva. Eso es posible, pero el método de Monte Carlo establece que si usted quiere tener un nivel de confianza del 99% de que nunca agotará sus ahorros durante treinta años sus retiros mensuales deberán ser inicialmente de no más de 2,700 pesos. Después del primer año se podría incrementar el monto anual de retiro en un 3% anualmente.



así que después de treinta años estaría retirando 6,554 mensualmente.

Si los 2,700 mensuales no fueran suficientes durante el primer año, entonces usted tal vez estuviera dispuesto a asumir un mayor riesgo. Si pudiera tolerar un nivel de confianza del 80%, sus retiros mensuales durante el primer año podrían ser de hasta 3,600 pesos.

¿Podría el irse a los extremos de inversión —digamos, poniendo todos sus ahorros casi enteramente en acciones o en bonos— proporcionarle más ingresos mensuales? La respuesta es un rotundo no. Por ejemplo, si usted colocara la totalidad del dinero en acciones de la bolsa y aceptara una tasa de garantía del 80%, todavía tendría que empezar con retiros de 3,600 pesos al mes, cuando mucho, de lo que tuviera en sus inversiones. Poniendo el 95% de todos sus ahorros en bonos de corto y largo plazo, sus retiros mensuales durante el primer año no podrían ser mayores a 3,000 pesos.

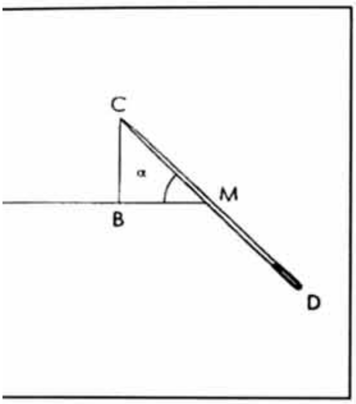


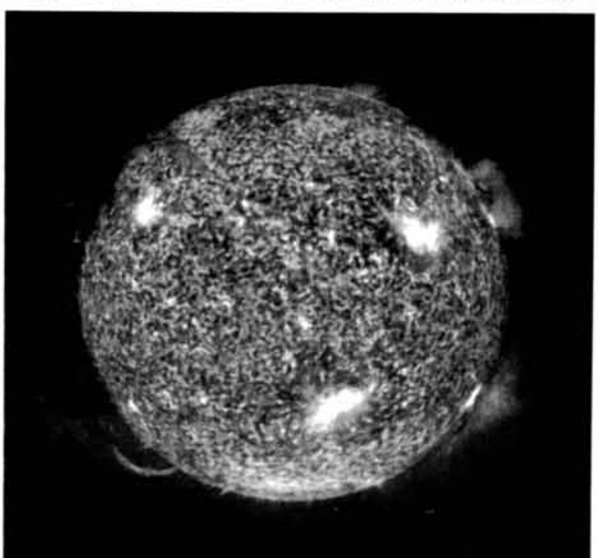
Ilustración del problema de la aguja de Buffón

El problema de **la aguja de Buffón**

Quizá el uso documentado más antiguo de lo que en la actualidad se considera una aplicación del método de Monte Carlo se encuentra en la obra de George Louis Leclerc, conde de Buffón, en 1777. Él se planteó el siguiente problema: "Una aguja de longitud L se lanza al azar sobre un plano horizontal rayado con líneas rectas paralelas separadas una distancia d (mayor que L). ¿Cuál es la probabilidad P de que la aguja intersecte a una de estas líneas?".

Para responder a la pregunta, Buffón realizó el experimento lanzando la aguja muchas veces. Veamos cómo se puede hacer el experimento realizando juegos de azar.

Proceso de fisión nuclear en el Sol, el cual puede modelarse por Monte Carlo



Cuando se lanza la aguja y cae sobre la superficie rayada, puede adoptar una posición como la que se indica en la Figura 1. Dicha posición queda determinada, por ejemplo, midiendo dos cantidades: la distancia MA de su punto medio M a la línea vertical L y su inclinación respecto a ella determinada con el ángulo a.

Decir que el lanzamiento de la aguja fue al azar significa que la posición del punto medio M y la magnitud de su ángulo de inclinación están determinados al azar, es decir, que no se pueden determinar de antemano aunque las condiciones en cada lanzamiento sean iguales.

Es claro que el lanzamiento físico de la aguja es un proceso tedioso y tal vez la mayoría de las personas lo abandonen después de hacerlo unas sesenta veces. Actualmente, este proceso puede cómodamente simularse en una computadora y "lanzar" en forma virtual una "aguja". Pero antes de tratar con mayor detalle esa modalidad, imagine que el mismo experimento lo hacemos girando dos ruletas; al resultado de girar una de ellas lo relacionamos con la posición de M (la distancia MA) y el resultado de la segunda nos permite obtener un ángulo (ángulo a). "Jugar a la ruleta" hace posible encontrar la posición de la aguja determinando dos propiedades que caracterizan el comportamiento del sistema: aguja y rayado. Después de dos juegos de ruleta, ya podemos decidir si la aguja intersecta o no a una de las líneas verticales después del lanzamiento. ¿Cuántas veces debemos repetir el lanzamiento simulado mediante las ruletas? Bueno, para obtener todos los valores posibles de M y a sería necesario hacerlo un número infinito de ocasiones, lo que es imposible; por ello debemos conformarnos con un número finito, aun cuando sea tal vez muy grande: mil o quizá diez millones. Lo anterior significa que se debe hacer una selección o muestreo; es decir, de una población muy grande (infinita) hay que seleccionar un número finito de elementos y tratar de

El método Monte Carlo fue una herramienta importante para la investigación sobre la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial

inferir a partir de ellos la información relacionada con toda la población. Si repitiéramos el experimento diez millones de veces y contáramos cuántas veces la aguja corta a una línea, podríamos estimar la probabilidad a que se hace referencia líneas arriba. En otras palabras, podríamos determinar el comportamiento probable del sistema basándonos en un gran número de ensayos de juegos de azar (giros de una ruleta) que simulan los eventos físicos responsables de tal comportamiento.

En la actualidad se cuenta con dispositivos que pueden sustituir de manera más práctica a la ruleta: los llamados generadores de números pseudoaleatorios. Se encuentran integrados en muchas calculadoras de bolsillo y en paquetes de cómputo comerciales ejecutables en una computadora tipo PC; algunos de esos programas están incluidos en Excel, Matlab, Matemática y Maple, por solo citar algunos. Basta con pulsar una tecla de la calculadora o ejecutar un mando del programa de cómputo para echar a andar un proceso de cálculo que simula los giros de la ruleta.

Esta metodología de muestrear mediante la generación de números pseudoaleatorios e inferir el comportamiento promedio o probable de un sistema es en esencia, como ya hemos visto, el método de Monte Carlo.

Monte Carlo y las **encuestas de opinión**

El método de Monte Carlo tiene semejanzas con una encuesta de opinión en la que se quiere predecir el resultado de una elección preguntando la opinión a una porción de la población de votantes (muestra); en el caso de la aguja de Buffón, se "pregunta" por la posición de la aguja en cada uno de un número finito de lanzamientos (muestra) del número infinito posible (población). Estimar la probabilidad de que la aguja corte a una línea contando el número de eventos favorables en dicha muestra e inferir que ese es el comportamiento de toda la población conduce a error. Lo mismo sucede en la predicción de un candidato ganador. Reducir tal error es primordial en la metodología. Si aumentamos el número de votantes encuestados o el número de lanzamientos de la aguja se esperaría mejorar el resultado, pero reducir el error de esa manera resulta caro en términos del tiempo dedicado a la encuesta. Existen alternativas más baratas conocidas como técnicas para la reducción de la variancia sin aumentar el número de votantes encuestados, o bien obtener el mismo error a partir de encuestar un número menor de ellos. Un ejemplo es la técnica que se conoce como "control de la población", la cual tiene como finalidad muestrear con mayor frecuencia porciones de la población que son más importantes, o bien hacerlo con menor frecuencia a las menos importantes (ruleta rusa). En una encuesta de votantes, suponga que en la población hay 40% de ellos que simpatiza con el partido A, otro 40% que se siente atraído por el B y que un 20% favorece al partido C, que podría suponerse como de votantes "independientes". Suponga asimismo que la mayoría de los afiliados a los partidos A y B son consistentes con sus respectivas posturas y que en general estas pudieran ser antagónicas, no así en el caso de los independientes, los cuales pueden inclinarse hacia un lado o hacia otro.

La estimación del resultado global de la votación quedará condicionada por un cálculo más confiable del voto independiente, por lo que conviene tener más información sobre los miembros de ese sector. Por consiguiente, a manera de ilustración, una buena estrategia consiste en seleccionar una muestra con un 20% de A, un 20% de B y un 60% de independientes. Por supuesto, no entraremos aquí en los detalles técnicos para obtener tal muestra.

Nota sobre modelación **y simulación**

"Simulación" es, en general, hacer de cuenta que uno está tratando con el fenómeno real cuando lo que se está haciendo es una imitación. En la investigación de operaciones, las "imitaciones" se obtienen a través de un modelo realizado por computadora de la realidad a simular. Por ejemplo, un simulador de vuelo en una PC es también un modelo realizado por computadora de algunos aspectos del vuelo: muestra en la pantalla los controles y lo que el "piloto" (la persona que lo opera) se supone que va a ver desde la "cabina" (su silla ante la computadora).

¿Por qué usar modelos?

El "volar" en un simulador es mucho más seguro y barato que volar en un avión real. Precisamente por esta razón se utilizan los modelos en la industria, en el comercio y en el ambiente militar; en este último caso, hacer experimentos reales puede resultar muy costoso, muy peligroso y a menudo imposible. Con tal de que los modelos sean descripciones adecuadas de la realidad (que sean válidas), la experimentación con ellos puede tener como resultado un ahorro de dinero, de tiempo y aun de sufrimientos.

¿Cuándo usar simulaciones?

Los sistemas que cambian en el tiempo —como una gasolinera a donde llegan y se van vehículos (sistemas que se denominan "dinámicos")— involucran al azar, o sea, aleatoriedad. Nadie puede conjeturar a qué hora exacta llegara el próximo coche a la gasolinera. Tales sistemas son buenos candidatos para la simulación. La modelación de sistemas dinámicos complejos que requieren de muchas simplificaciones, teóricamente puede dar lugar a modelos que por lo anterior pueden no ser válidos. Las simulaciones no necesitan de muchas suposiciones simplificadoras, lo que las hace una herramienta útil incluso sin que haya aleatoriedad.

¿Como simular?

Suponga el lector que estamos interesados en el funcionamiento de una gasolinera. Podemos describir el comportamiento de este sistema de manera gráfica anotando el número de vehículos en un momento dado cualquiera: el estado del sistema. Cada vez que llega un vehiculo, la gráfica debe registrar un incremento en una unidad, en tanto que cada vehículo que se va de la gasolinera ocasiona un decremento de una unidad. Esta gráfica, denominada "trayectoria muestral", podría obtenerse a partir de la observación directa de una gasolinera real, pero también podría construirse de manera artificial.

En tal construcción artificial y en el análisis de la trayectoria muestral resultante (o de más trayectorias muestrales en casos más complejos) consiste la simulación.