UNIVERSIDAD VERACRUZANA

FACULTAD DE FILOSOFÍA

MAESTRÍA EN FILOSOFÍA

$2^{\aleph_0} = \aleph_1$: UN ACERCAMIENTO FILOSÓFICO A LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

Tesis

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN FILOSOFÍA

Presenta

JUAN CARLOS TORRALVA APODACA

Director de tesis:

DR. ADOLFO GARCÍA DE LA SIENRA GUAJARDO

Xalapa-Enríquez, Ver., Junio de 2018

A Diego
Por enseñarme la infinitud en el número 8.

A Fer
Por no en vano dibujar corazones en la ventana.

Agradecimientos

La presente investigación fue posible gracias al apoyo de una beca del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) durante el periodo agosto de 2014 a julio de 2016.

Antes que nada agradezco al Doctor Adolfo García de la Sienra Guajardo por abrirme las puertas del paraíso de Cantor durante las clases del seminario de lógica en el Insituto de Filosofía, por brindarme las herramientas para iniciar mi investigación y acompañarme durante el recorrido. Muchas gracias.

Al Doctor Joan Bagaria por recibirme en su universidad, compartirme de su conocimiento y enseñarme a mantener la integridad sin caer del “borde de la inconsistencia”. Gràcies.

Al Doctor Cristian Gutiérrez Ramírez por siempre escucharme y acompañarme en este camino, a veces tan solitario, que es la filosofía de la teoría de conjuntos, por permitirme asistir a sus seminarios en el Instituto de Investigaciones Filosóficas y brindarme su amistad. Muchas gracias.

A los profesores Ángel Luna Díaz Peón, Enrique Sánchez Ballesteros y Rubén Sampieri Cábal por darme un poco de su tiempo para la lectura de este trabajo.

A Victoria Apodaca, mi madre, por apoyarme en todo momento y enseñarme que, “mucho más allá de mi ventana algodones jugaban a ser un jardín”.

A Juan Carlos Torralva, mi padre, por apoyarme económica y moralmente cuando lo necesité, por enseñarme con sus acciones que “basta con las manos, basta con el pecho, basta con las piernas y con el empeño”.

A Erick Torralva, mi hermano, por ensenñarme a aceptar que, aunque ya no somos niños, hay “otro buen camino que seguir descalzos contando la arena”.

A mis amigos, Akeri, Andrés, Fabián y Samuel porque, a pesar de “deberles mucho tiempo” han estado ahí y, espero, lo continuen estando.

A Arturo, Gerardo y Rodrigo por enseñarme a conocerme un poco más en los momentos cuando más me sentía perdido.

A Iru, Jawa y Papita por ensenñarme a perseverar sin importar los resultados. A Sol por cambiarme la vida con el corto tiempo que estuvo aquí.

A Fernanda y Diego, los días que se arriman a los finales de noviembre.

Índice

> There are two labyrinths in which the human mind is caught. One concerns the composition of the continuum the other concerns the nature of freedom. And both arise from the same source, namely, the infinite.
>
> G.W. Leibniz

Parece ser una especie de *dictum* que, cuando alguien se propone trabajar dentro de la filosofía de las matemáticas o escribe un texto sobre la hipótesis del continuo (CH) o sobre los teoremas de incompletud de Gödel. Podemos encontrar varios ejemplos de lo anterior: Paul Cohen tiene un texto sobre la hipótesis del continuo, así como Kurt Gödel, Hermann Weyl, David Hilbert o Raymond Smullyan, por sólo nombrar algunos de los autores más reconocidos dentro de la disciplina. Lo mismo podemos decir sobre los teoremas de incompletud de Gödel: Smullyan, Boolos, von Neumann, incluso autores como Alan Turing o Roger Penrose. Es a partir de estos temas que uno inicia su investigación dentro de aquel "paraíso que Cantor ha creado para nosotros" mencionado por Hilbert y, a su vez, es gracias a ese paraíso que se nos abrieron las puertas de una gran cantidad de subdisciplinas que conforman la topografía de las matemáticas actuales.

Dentro de ese contexto es que, modestamente, inscribimos este trabajo, siendo los dos temas antes mencionados los que constituyen el cuerpo de esta investigación, siempre atentos a realizar una lectura desde la filosofía sobre los resultados técnicos. Por lo mismo, la figura central de nuestra investigación es la del lógico austriaco-estadounidense Kurt Gödel quien no sólo nos legó los teoremas de incompletud que llevan su nombre sino también una de las dos respuestas que tenemos acerca de la hipótesis del continuo, a saber, la consistencia de la misma a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC) utilizando para ello su ahora famoso modelo L[1], dando con ambos resultados nacimiento a diversas subdisciplinas como la teoría de modelos, la teoría de las funciones recursivas o la teoría de la demostración, así como, dentro de la teoría de conjuntos, la construcción de modelos internos.

Filosóficamente, el pensamiento de Gödel se ha mirado a través de la historia como el establecimiento de una postura fuertemente realista tanto ontológica como epistemológicamente y será a partir de la misma que realizaremos una lectura filosófica de sus aportaciones técnicas antes mencionadas. Pero, así como del ser, el realismo se dice de muchas maneras, por lo que brindar una taxonomía de los realismos será de gran importancia, siendo lo que constituya la primera parte de esta investigación. En un segundo momento presentaremos los resultados de Gödel sobre la consistencia de CH con ZFC así como sus teoremas de incompletud para, en un tercer momento, ubicar el pensamiento de Gödel dentro de la taxonomía de realismos antes mencionada. Todo lo anterior nos servirá para poder realizar una lectura del resultado de consistencia de CH desde una postura realista acorde a la profesada por Gödel utilizando como auxiliares los teoremas de incompletud.

[1] Dentro del mismo resultado, Gödel demostró la consistencia del axioma de elección (AC) con los axiomas de ZF, iniciando con ello toda una nueva serie de discusiones en torno a uno de los axiomas más controvertidos de nuestra época.

Dado el carácter técnico de los desarrollos de Gödel, será necesario brindar al lector una breve introducción al lenguaje que compone la teoría axiomática de conjuntos empleada a lo largo de la presente investigación, a saber, ZFC para, posteriormente, presentar las razones filosóficas que llevaron a Georg Cantor a enunciar CH en primer lugar así como el lugar que la misma presenta para la filosofía de las matemáticas tanto en su tiempo como en el nuestro. No será una tarea sencilla y, dado el carácter de "intersección" que casi toda investigación en el campo de la filosofía de las matemáticas representa, no podemos más que admitir que en algunas partes, a la investigación le sobrará filosofía y en otras matemáticas, situación que a nuestro parecer acaece sobre todas las denominadas "filosofías de ...".

Teoría de conjuntos

Con motivaciones diferentes[2] les debemos a Georg Cantor y Richard Dedekind el establecimiento de la teoría de conjuntos no sólo como una herramienta para poder entender gran parte de las matemáticas de su tiempo en un lenguaje común (una *arena* para decidir qué descripciones estructurales de las matemáticas son o no coherentes, como diría Maddy [2011: 31]), sino también como una subdisciplina dentro de las matemáticas con problemas y objetos de estudio propios. A partir de sus investigaciones sobre series trigonométricas[3], Cantor se "internaría" en el universo transfinito[4] - sobre todo después de su descubrimiento de la no-denumerabilidad de $\mathbb{R}$- mientras que Dedekind[5] utilizaría sus investigaciones con conjuntos y funciones como la base para erigir el edificio de las matemáticas puras. Ambos "impulsos" marcarían gran parte de los desarrollos en teoría de conjuntos hasta el proceso de axiomatización iniciado por Ernst Zermelo y continuado por Abraham Fraenkel y Thoralf Skolem[6].

Desde su nacimiento, la teoría de conjuntos pecaba de imprecisión. Basta para mostrarlo la gran variedad de términos en alemán que la palabra "conjunto" abarcaba: *Mannigfaltigkeit, Klasse, Menge, System, Inbegriff, Gebiet, Complex, Vielheit, Gesamtheit, Schaar.* Sumémosle a lo anterior el descubrimiento de las siguientes paradojas en la teoría de conjuntos previa al proceso de axiomatización (llamada, teoría intuitiva o *naïve* de conjuntos):

1. La paradoja de Russell: Sea $R = \{x|x \notin x\}$, entonces $R \in R \iff R \notin R$.

2. La paradoja de Cantor: Sea M un conjunto que posee un número cardinal m, el cual sería el número cardinal máximo. Por el Teorema de Cantor, tenemos que considerar $\wp(M)$ de todos los subconjuntos de M, por lo que la cardinalidad de $\wp(M)$ tiene que ser mayor que la cardinalidad del cardinal máximo m.

3. La paradoja de Burali - Forti: El tipo de orden de los ordinales menor que un α específico es α misma, por lo que el tipo de orden de todos los ordinales menor que Ω

[2] *Cfr.* Ferreirós, 2007.

[3] Véase el texto de Joseph W. Dauben (1990) para una exposición detallada del proceso de investigación de Cantor.

[4] Aquello que Ferreirós llama el *laberinto* del infinito y el continuo. 2007: XV.

[5] En (2007) y a lo largo de su obra, Ferreirós se ha dedicado a colocar la figura de Bernhard Riemann a la par de Cantor y Dedekind como "creadores" de la teoría de conjuntos. Para más sobre este punto, *cfr.* capítulo II en (2007) así como su estudio introductorio en (2000).

[6] Por nombrar sólo uno de los múltiples sistemas axiomáticos para la teoría de conjuntos.

es Ω mismo. Pero esto significa que Ω, siendo el tipo de orden de un segmento inicial de los ordinales es estríctamente menor que el tipo de orden de todos los ordinales, pero éste último es por definición Ω.

Antes de continuar debemos establecer los símbolos del lenguaje que ocuparemos a lo largo de la presente investigación. Al utlilizar ZFC como nuestro sistema de axiomas suponemos la lógica de predicados donde $\mathbb{L} = \{\in\}$, es decir, asumimos los siguientes símbolos lógicos y parámetros:

1. Delimitadores: (,), {, }, [,]
2. Conectivos enunciativos: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \iff$.
3. Variables individuales: $x, y, z, ...$
4. La relación binaria $\in$ que es interpretada como la relación de pertenencia.
5. El cuantificador universal: $\forall$
6. El cuantificador existencial: $\exists$

Algunas otras nociones que son importante definir serán:

1. Subconjunto: $x \subseteq y \iff \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$
2. Igualdad: $x = y \iff x \subseteq y \wedge y \subseteq x$
3. Conjunto vacío: $x = \emptyset \iff \forall z(z \notin x)$
4. Negación de la pertenencia: $x \notin y \iff \neg(x \in y)$
5. Función de sucesor (ordinal): $y = S(x) \iff \forall z(z \in y \iff z \in x \vee z = x)$
6. Intersección: $y = v \cap w \iff \forall x(x \in y \iff x \in v \wedge x \in w)$
7. Conjunto unitario o ***Singleton***: SING(***x***) $\iff \exists y \in x \forall z \in x(z = y)$

Habiendo establecido nuestro lenguaje, lo único que resta es presentar el sistema de axiomas que componen a ZFC. El sistema de ZFC se compone de 9 axiomas. Siguiendo a Jech (2003) y Kunnen (2013) éstos son:

1. **Extensionalidad**: Si X y Y tienen los mismos elementos, entonces $X = Y$, es decir, $\forall z(z \in x \iff z \in y) \rightarrow x = y$
2. **Par**: Para cualquier conjunto a y b existe el conjunto $\{a, b\}$ que contiene exactamente a a y b, es decir, $\exists z(x \in z \wedge y \in z)$
3. **Esquema de comprensión**: Si P es una propiedad (con parámetro p), entonces para cualquier X y p existe un conjunto $Y = \{u \in X : P(u, p)\}$ que contiene a todos los $u \in X$ que tengan la propiedad P, es decir, para cada fórmula ϕ sin y libre $\exists y \forall x(x \in y \iff x \in v \wedge \phi(x)$

4. **Unión**: Para cualquier X existe un conjunto $Y = \bigcup X$, la unión de todos los elementos de X, es decir, $\forall x \exists y \forall z[z \in y \iff \exists w(w \in a \land z \in w)]$

5. **Conjunto potencia**: Para cualquier conjunto X existe el conjunto $Y = \wp(X)$, el conjunto de todos los subconjuntos de X, es decir, $\exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y)$

6. **Infinito**: Existe un conjunto infinito, es decir, $\exists x[\emptyset \in x \land \forall y \in x(S(y) \in x)]$

7. **Esquema de reemplazo**: Para cada fórmula ϕ sin B libre, $\forall x \in A \exists ! y \phi(x, y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \phi(x, y)$

8. **Regularidad**: Todo conjunto no vacío tiene un elemento $\in$ - minimal, es decir, $\exists y(y \in x) \to \exists y[y \in x \land \neg \exists z(z \in x \land z \in y)]$

9. **Elección**: Toda familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección, es decir, $\emptyset \in F \land \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset) \to \exists C \forall x \in F[SING(C \cap x)]$

El axioma de comprensión es también conocido como “axioma de comprensión restringida”, esto debido a que, previo al trabajo de axiomatización, este principio era llamado “comprensión universal” y nos indica que para cualquier conjunto m, $\phi(m) = \{y | y \subseteq m\}$. Como uno puede darse cuenta, así enunciado, caemos presa de la paradoja de Russell, por lo que en sistemas axiomáticos como ZFC podemos escapar de estas paradojas al tener un sistema sólido[7]. Con los descubrimientos de Gödel y Cohen, las matemáticas contemporáneas darán otro giro, dejando de lado el impulso inicial recibido por el descubrimiento de las paradojas en la teoría intuitiva de conjuntos, pasando por el proceso de axiomatización para llegar a lo que sería el *ethos* de las matemáticas contemporáneas, a saber, el estudio de los modelos de ZFC (Kunnen: 2).

Siguiendo a Bagaria (2013: 5), un modelo de ZFC es el par $\langle M, \varepsilon \rangle$, donde M es un conjunto no vacío o una clase propia y ε es una relación binaria en M tal que $\langle M, \varepsilon \rangle$ satisface los axiomas de ZFC. Un modelo $\langle M, \varepsilon \rangle$ es llamado “standard” si ε es interpretado como $\in$, es decir, la relación de pertenencia entre conjuntos. Formalmente, $\varepsilon = \in (M \times M)$. Si $\langle M, \varepsilon \rangle$ es standard se escribe usualmente $\in$ en lugar de ε. Bagaria nos dice al respecto “the main motivation for building models of ZFC of various sorts is to prove consistency and independence results in mathematics” (2013: 5).

Maddy (2011) también presenta algunos argumentos para sostener la importancia de la teoría de conjuntos no sólo como una herramienta técnica imprescindible en el arsenal de las matemáticas contemporáneas, sino también como el aparato filosófico de las matemáticas, la teoría metamatemática por excelencia o, en palabras de Zermelo:

> Set theory is that branch of mathematics whose task is to investigate mathematically the fundamental notions ‘number’, ‘order’, and ‘function’, taking them in their pristine, simple form, and to develop thereby the logical foundations of all arithmetic and analysis; it thus constitutes an indespensable component of the science of mathematics. (en Maddy, 2011: 33)

[7]Sobre la diferencia entre “solidez” (*soundness*) y “completud” (*completeness*) podemos decir, a grandes rasgos, que la primera significa que no podemos probar nada que sea incorrecto dentro de nuestro sistema, mientras que la segunda significa que podemos probar cualquier cosa que sea correcta.

Algunos de los argumentos que presenta Maddy (2011: 34) son:

1. Nos brinda una herramienta única que otorga significado a preguntas acerca de "existencia" y "coherencia".
2. Vuelve claros y precisos conceptos y estructuras que carecían de tales cualidades.
3. Identifica perfectamente supuestos fundamentales que participan, de maneras distintas, en campos diferentes.
4. Facilita la conexión inter-teórica entre diversas ramas de las matemáticas, ahora uniformemente representadas.
5. Permite establecer y responder preguntas acerca de "demostrabilidad" (provability) y "refutabilidad" (refutability).
6. Abre la puerta a hipótesis más fuertes para resolver problemas abiertos.

Si bien la relevancia de la teoría de conjuntos es ahora más palpable, debemos investigar el lugar que CH ocupa dentro de la misma, llevando incluso a autores como Koellner (2013) a decir "the problem (CH) actually arose with the birth of set theory; indeed, in may respects it stimulated the birth of set theory". Pasemos entonces a ello.

La hipótesis del continuo (CH)

Una de las anécdotas más importantes que componen la gran mayoría de los textos sobre CH es aquella de David Hilbert en el International Congress of Mathematicians en Paris en 1900. La anécdota va así. David Hilbert, en ese momento el matemático más importante del mundo junto con Henri Poincaré, presenta una serie de 10 problemas abiertos en las matemáticas que conformarán la investigación de la disciplina en el siglo por venir. La lista es variada: la hipótesis de Riemann (#8), el tratamiento matemático de los axiomas de la física (#6), la consistencia de los axiomas de la aritmética (#2) pero, en primer lugar, Hilbert coloca encontrar la solución a CH. 117 años después no sólo no tenemos una respuesta definitva a CH sino que, gracias a los trabajos de Gödel y Cohen, sabemos ahora que CH es independiente de nuestro sistema axiomático más poderoso, a saber, ZFC. El escenario de los fundamentos de las matemáticas, donde problemas como CH viven, obtiene así un nuevo elemento: el llamado "fenómeno de la indecidibilidad o independencia" y es que, a partir del descubrimiento de la independencia de CH y de los métodos empleados para la misma, toda una serie de problemas comenzaron a probarse independientes: la hipótesis de Suslin, la medida de Lebesgue del conjunto de los reales, el axioma de constructibilidad $V = L$, el axioma de Martin, entre otros.

Una prueba de independencia de un enunciado matemático ϕ tiene dos tipos de pruebas de consistencia relativa, esto es, si ZFC tiene un modelo (es consistente), entonces o existe un modelo donde ϕ se sostiene, ZFC más ϕ es consistente, o existe un modelo donde ϕ no se sostiene, ZFC más la negación de ϕ es consistente[8]. Como mencionamos anteriormente, CH tiene una naturaleza de este tipo, esto es, es una proposicón indecidible utilizando los

[8]Bagaria, 2013: 6

axiomas de ZFC, es decir, existe un modelo de ZFC donde ZFC + CH es consistente[9] así como existe un modelo de ZFC donde ZFC $+\neg$ CH es consistente[10]. Pero ¿cómo llegamos aquí?

Podemos enunciar CH de diversas maneras 1) ¿es la potencia del continuo equivalente a aquella de la segunda clase de números?, 2) ¿es $\mathbf{c} = \aleph_1$?, 3) ¿los números reales consituyen el conjunto potencia de los números racionales?, 4) ¿ es $\mathbf{c}$ lo mismo que $2^{\aleph_0}$?, 5) ¿cuántos puntos hay en una línea recta en el espacio euclideo? (Gödel), 6) ¿cuántos conjuntos diferentes de enteros existen?, 7) ¿es $2^{\aleph_0} = \aleph_1$?, 8) supóngase que $X \subseteq \mathbb{R}$, entonces existe una biyección $\pi : X \to \mathbb{R}$ (Woodin) o, simplemente, 9) no existe un conjunto cuya cardinalidad esté estrictamente comprendida entre la del conjunto de los números naturales y el de los números reales.

Por "cardinalidad" se entiende la cantidad de elementos que contiene un conjunto, por ejemplo, un conjunto que contiene 35 elementos posee 35 como número cardinal. En el caso de los conjuntos infintos, Cantor introdujo el símbolo $\aleph$ para caracterizar lo que llamó "cardinales transfinitos", es decir, una extensión al concepto de número que permite trabajar con cardinales de conjuntos infinitos como si se tratasen de cantidades "normales" siguiendo las reglas de una aritmética transfinita, ésto debido a su descubrimiento[11] según el cual los conjuntos finitos e infinitos se rigen por una lógica interna distinta: mientras que las colecciones finitas se rigen por el axioma euclideo de el todo es mayor que la parte, las colecciones infintas lo echan por tierra, siendo esta característica aparentemente incongruente su misma definición. Siguiendo a Richard Dedekind (2015), un conjunto A es **Dedekind-infinito** si un subconjunto propio B de A es equipolente a A, es decir, existe una función biyectiva de A a un subconjunto propio de B de A; si un conjunto no cumple con esta propiedad se dice entonces que éste es **Dedekind-finito**. Sirva para ilustrar lo anterior una cita de Cantor respecto al prejuicio contra los números infinitos:

> The fundamental flaw of all so-called proofs of the impossibility of infinite numbers is that they attribute to these numbers all the properties of finite numbers, whereas the infinite numbers . . . constitute an entirely new type of number, a type whose nature should be an object of research instead of arbitrary prejudice. (en Foster Wallace, 2010: 40)

De lo anterior merece ser resaltada la importancia de la correspondecia uno a uno (o función biyectiva) entre elementos de conjuntos diferentes que tanto Cantor y Dedekind, así como Galileo y Bolzano antes que ellos, utilizaron para comparar el tamaño entre conjuntos. Tomando la existencia de una correspondencia uno a uno como criterio de medida entre dos conjuntos, Cantor pudo mostrar la existencia de más de un nivel de infinitud dentro de las matemáticas, siendo el conjunto de los números naturales la primera estancia del paraíso transfinito de Cantor. Del conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) sabemos, al menos desde los griegos, que es infinito, es decir, es posible generar un número más grande a partir de la noción de sucesión y es, a su vez, definido por los axiomas de Peano:

[9] Este resultado se lo debemos a Gödel (1938) y es el tema principal de la presente investigación.

[10] Este resultado se lo debemos a Cohen (1963) empleando la técnica de *forcing*.

[11] Influido en gran medida por los resultados de Galileo Galilei y Bernhard Bolzano respecto a la naturaleza de las colecciones infinitas.

1. Cero es un número.
2. Si a es un número, el sucesor de a también es un número.
3. Cero no es el sucesor de algún número natural.
4. Dos números cuyos sucesores son iguales son ellos mismos iguales.
5. Si un conjunto S de números contiene al cero y también al sucesor de cada número en S, entonces cualquier número está en S, es decir, cualquier número natural pertenece a ese conjunto[12].

Lo imporante del conjunto de los números naturales es la posibilidad de contarlos sin importar que este proceso, de manera fáctica, nunca termine. Partinendo de ésto, Cantor define un “conjunto numerable” como aquel cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia uno a uno o con el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) o un subconjunto finito del mismo. La primera demostración de esta extraña cualidad de la infinitud del conjunto de los naturales, se la debemos a Galileo Galilei, quien en su texto *Diálogo acerca de dos nuevas ciencias*, de la mano de su personaje Salviati, establece una correspondencia uno a uno entre los números naturales y sus respectivos cuadrados, concluyendo que existen tantos cuadrados como números naturales, es decir, el conjunto de todos los números naturales posee el mismo número de elementos que el conjunto de los cuadrados de los números naturales, un subconjunto propio del conjunto de los naturales.

$$\begin{array}{cccccccl}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \ldots
\end{array}$$

Figura 1: Equivalencia entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de sus respectivos cuadrados.

Siguiendo la demostración de Galileo, Cantor se preguntó si el mismo escenario sucedería si, en lugar de establecer una correspondencia uno a uno con el subconjunto de los cuadrados, se hiciera con el conjunto de los números racionales[13] demostrando, a través de su ahora famosa prueba de diagonalización, que el conjunto de los racionales ($\mathbb{Q}$) es numerable, dicho de otro modo, se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$.

[12]Este último es el llamado “axioma de inducción”.

[13]Subconjunto de los números reales, cuyos números son expresados como $\frac{a}{b}$ cuando a y b son enteros y b es distinto de 0.

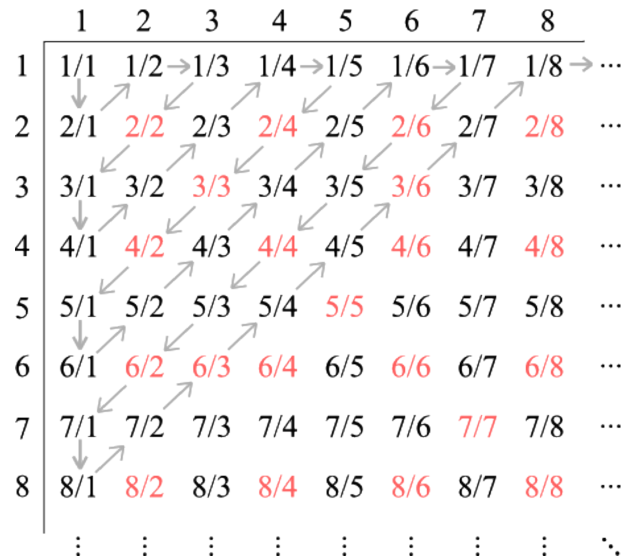

Figura 2: Prueba en diagonal de la numerabilidad del conjunto de los números racionales (los números marcados en gris se eliminan al ser sólo una notación diferente para el mismo número).

De manera muy sencilla, lo que Cantor nos muestra en esta prueba es que, siguiendo el orden de las flechas en la imagen, es posible establecer una correspondencia uno a uno entre los números racionales y los números naturales ya que $\frac{1}{1}$ se vincula con 1, $\frac{2}{1}$ con 2, $\frac{1}{2}$ con 3, $\frac{1}{3}$ con 4, etc.

Con estos resultados y el aparente poder que la correspondencia uno a uno parece tener sobre los conjuntos infinitos, la siguiente pregunta que se hizo Cantor fue si era posible establecer una correspondencia uno a uno ahora entre el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Debemos recordar que mientras la recta númerica[14], tiene como características 1) ser infinita y 2) poseer la cualidad de "sucesión" u "orden"[15], la recta real[16] posee, además de las características anteriores, 3) la cualidad de ser continua[17], es decir, no existen ni vacíos o grietas en ella, porque, al comprender dentro de sí a los números irracionales, es infinitamente densa. Nuevamente, Cantor utilizó su prueba en diagonal, pero el resultado no fue el esperado. Centrando su mirada en el intervalo 0 a 1[18] Cantor enlistó todos los números entre 0 y 1,[19] y construyó un número en diagonal al tomar un dígito de cada uno de los números en su lista (el primer dígito del primer número, el segundo dígito del segundo número, etc.). Una vez establecido este número, Cantor cambió cada uno de

[14]Manifestación geométrica del conjunto de los números enteros y racionales.

[15]Para cualquier punto n, $(n-1) < n < (n+1)$.

[16]Manifestación geométrica del conjunto de los números reales, siguiendo el llamado "axioma de Cantor - Dedekind".

[17]$f(x)$ es continua en un intervalo A si, en cualquier punto a en A la diferencia $f(a+\delta) - f(a)$ puede hacerse tan pequeña en la medida en que δ se vuelve arbitrariamente pequeña, es decir, sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $c \in D$, f es continua en c si para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mid x - c \mid < \delta$ entonces $\mid f(x) - f(c) \mid < \epsilon$.

[18]Bolzano ya había demostrado previamente que el intervalo 0 a 1 posee la misma cantidad de elementos que el intervalo 0 a 2 o cualquier otro intervalo, incluso que el intervalo 0 a 1 posee la misma cantidad de elementos que la misma recta real.

[19]Aquí representados por m's y w's que, a su vez, pueden ser intercambiados por cualquier número natural.

sus dígitos, creando un nuevo número que es diferente de todos los que se encuentran en la lista ya que difiere en el valor de cada dígito particular que conforma el número en diagonal. De lo anterior, lo que Cantor pudo derivar es que el conjunto de los números reales no es numerable, es decir, no es posible establecer una correspondencia uno a uno entre sus elementos y los del conjunto de los números naturales. Pero el conjunto de los números reales es también infinito, por lo que Cantor demostró, de igual manera, que existe más de un orden de infinitud dentro de las matemáticas: un infinito que corresponde a las colecciones que, si bien son infinitas, son numerables, y otro para las colecciones infinitas no-numerables[20]

---

[20]Esta es la presentación "didáctica" y más conocida de la no-denumerabilidad de $\mathbb{R}$. Siguiendo a Kharazishvili (2016), podemos presentar la prueba en diagonal como: considérense cualesquiera dos familias de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$ y $\{Y_i : i \in I\}$, ambas indizadas por un conjunto de índices y, supongámos que $X_i \neq X_j$ cuando $i \neq j$. En la familia de todos los pares con la forma (X_i, Y_j) considérese la diagonal que consiste en todos los pares (X_i, Y_j) donde i abarca I y definamos un subconjunto Z de $\{X_i : i \in I\}$ estipulando:

$$X_i \in Z \text{ sii } X_i \notin Y_i$$

De lo anterior se sigue que Z no puede ser idéntico con cualquier Y_i, ya que las relaciones $X_i \in Y_i$ y $X_i \notin Y_i$ están en conflicto.

Por otro lado y siguiendo a Lipton (2009), Cantor había presentado ya una demostración de la no-denumerabilidad de $\mathbb{R}$ sin apelar a la prueba en diagonal. Asumiendo que $r_1, r_2, \ldots$, es una lista de reales dentro del intervalo [0, 1], Cantor construye un número real x que se encuentra dentro del intervalo [0, 1] y que, además, satisface que, para todo $\kappa, x \neq r_\kappa$. Lipton presenta la prueba de la siguiente manera. Consideremos $I_0 = [0, 1]$. Construiremos ahora una serie de intervalos propios

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots$$

Supongamos ahora que hemos construido $I_{\kappa-1}$ para $\kappa \geq 1$, por lo que construiremos los siguientes intervalos como $I_{\kappa-1} = [a, b]$. Tomemos a c tal que

$$a \leq c \leq b$$

siendo c no igual a r_κ. Ahora r_κ se encuentra en, al menos, uno de los intervalos

$$[a, c] \text{ o } [c, b]$$

Sea entonces I_κ el primer intervalo que no contiene a r_κ. Dado que I_κ tiene a un intervalo I_∞, consideremos a x como cualqueir punto en I_∞. Por construcción x está en [0,1] y, además, x no puede ser igual a cualquier r_κ, esto debido a que, en un paso κ hemos seleccionado un I_κ de tal modo que $r_\kappa \notin I_\kappa$. Pero, como $I_\infty \subseteq I_\kappa$ se sigue que r_κ no está en I_∞.

Figura 3: Una vez establecido el número diagonal, sólo es necesario cambiar cada uno de sus dígitos, siendo este nuevo número distinto de todos los números en la lista, demostrando la imposibilidad de enumerar todos los números entre el intervalo 0 a 1.

En este punto es necesario regresar a los cardinales transfinitos expuestos anteriormente, ya que es a través de ellos que Cantor descubre la aritmética transfinita, a través de la cual le será posible postular la hipótesis del continuo. Como se dijo antes, los cardinales transfinitos son una extensión del concepto de número que le permite a Cantor trabajar con conjuntos infinitos como si se tratasen de conjuntos finitos. Sumado a lo anterior, Cantor caracteriza a su primer tipo de conjunto infinito (el que es tanto infinito como numerable) con el cardinal $\aleph_0$, el más pequeño de los niveles del infinito que comprende tanto a los números enteros, como a los racionales. Del mismo modo, Cantor había descubierto que, dado cualquier conjunto, existe siempre un conjunto más grande: el conjunto de todos los subconjuntos de éste, el llamado *conjunto potencia*. Habiendo descubierto la no-numerabilidad del conjunto de los reales, Cantor supuso entonces que éste se encontraba en un nivel superior de cardinalidad a $\aleph_0$, ya que se componía de todos los posibles subconjuntos del conjunto de los enteros; cada entero puede o no estar incluido en cualquiera de las posiciones infinitas de un número decimal. De ahí que el número de elementos del continuo sea 2 elevado a la potencia del número infinito de los enteros, esto es, el número cardinal del continuo es $c = 2^{\aleph_0}$. De lo anterior podemos resaltar dos cosas importantes dentro de la aritmética transfinita 1) los números transfinitos no siguen las reglas de la aritmética regular (por ejemplo $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ó $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$) y 2) la operación de exponenciación cambia el valor de los $\aleph$.

Es justo en este momento que Cantor se hace la pregunta que lo llevará a postular la CH, a saber, si existe algún número cardinal entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$. Lo anterior se vuelve importante en la medida en que Cantor quería ordenar estos nuevos números transfinitos, poder nombrarlos de manera consecutiva como

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$$

Si podía demostrar que a $2^{\aleph_0}$ le correspondía el siguiente cardinal transfinito, es decir, $\aleph_1$, sólo debía continuar de manera ascendente para nombrar todos los $\aleph$. Mientras desconociera la respuesta a esa pregunta el orden de los cardinales transfinitos seguiría siendo un misterio ya que no podría decir cuál cardinal es el siguiente a $\aleph_0$. Pero Cantor creía que c era el siguiente cardinal transfinito, por lo que postuló lo siguiente

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Esta es la hipótesis del continuo[21], postulada por Cantor en 1878 quien, a pesar de sus esfuerzos, no pudo resolver. Como se mencionó antes, se tuvo que esperar hasta 1963 para que se tuviera una respuesta a esa pregunta dentro de los axiomas de **ZFC**. Primero, en 1938, Kurt Gödel demostró que ninguna contradicción puede surgir si CH es agregada a los axiomas convencionales de **ZFC**, es decir, no hay prueba de la negación de CH dentro de **ZFC**. Pero en 1963, Paul J. Cohen, a través de su método de *forcing*, demostró que ninguna contradicción puede surgir si agregamos la negación de CH a los axiomas de **ZFC**, es decir, no hay prueba de CH dentro de **ZFC**. Ambos resultados derivaron en la independencia de la hipótesis del continuo dentro de **ZFC**, situación que nos lleva a dos posiciones respecto al estado de CH: Gödel y sus seguidores sostienen que el significado de CH es independiente de cualquier sistema formal de axiomas, siendo esta independencia una muestra de la debilidad de éstos al ser claro que CH es verdadera o falsa; mientras que Cohen y sus seguidores, sugieren que, con el tiempo, la tendencia general será la de aceptar CH como falsa, esto según la idea de Cohen de que $\aleph_1$ es el conjunto de ordinales numerables, y esta es la forma más simple de generar un cardinal infinito, a través de un proceso discreto de añadir un conjunto a la vez, sin embargo, c, el conjunto del continuo, se genera por medio de una operación más compleja, a través del axioma de conjunto potencia, indicando la imposibilidad de que, a partir de un proceso discreto de adición de conjuntos uno a la vez, pueda alcanzarse un infinito mucho más rico como lo es c.

Las consideraciones metamatemáticas que se desprenden de lo anterior son de capital importancia. Por un lado, decidir CH se vuelve relevante en la medida que responde a la necesidad de completar **ZFC** como una teoría fundacional de las matemáticas donde no exista la indecidibilidad, por lo que proyectos como el programa de Gödel para buscar nuevos axiomas para **ZFC** intentan solucionarlo dentro de la visión estandar de la teoría de conjuntos. Por otro lado, la indecidibilidad de CH abre la posibilidad a distintos universos dentro de **ZFC** (el llamado *pluralismo conjuntista*) obligándonos a preguntarnos cuál de éstos es el más relevante para describir el mundo matemático. De igual modo, de la mano del programa de Gödel, el estatus de CH nos permite preguntarnos qué es un axioma, cómo se justifica dentro de nuestro sistema o si el papel de la auto-evidencia deja su lugar al de la coherencia interna. Por último, y exclusivamente centrado en las soluciones que tanto Gödel como Cohen dieron a CH, nos permite acercarnos de una manera filosófica y cuestionarnos acerca de la naturaleza de las pruebas; preguntarnos si la forma en que cada uno de ellos propuso una solución a CH no tendría que ver con su trasfondo filosófico respecto a la naturaleza de las entidades matemáticas. Basta recordar que Gödel era un realista declarado que profesaba un respeto muy grande al universo matemático, donde cada problema tiene una única respuesta, mientras que Cohen era más bien cercano a una postura formalista, que se encuentra desvinculada de compromisos ontológicos respecto a las entidades matemáticas

[21]O en su versión generalizada $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

al considerarlas sólo como una secuencia de reglas de manipulación. Será a partir de tales trasfondos, específicamente el de Gödel, desde donde partirá la propuesta de lectura de la presente investigación, esta es, establecer una lectura platonista de los resultados de Gödel respecto a CH valiéndonos de los teoremas de incompletud como estrategia heurística y recordando, siguiendo una versión más moderada de la presentada por Rodríguez Consuegra, que Gödel se consideraba así mismo también un filósofo y que, después de sus grandes desarrollos técnicos, se dedicó a "regresar en sus pasos" para entretejer sus matemáticas con su metafísica, o en palabras de Rodríguez Consuegra "No puede entenderse a Gödel el lógico matemático sin ligarlo estrechamente con Gödel el filósofo, no pueden desgajarse y separarse en Gödel el análisis filosófico y los resultados técnicos" (en Zalamea, 1996: 347).

Finalmente, a 137 años de que Cantor postulara de manera formal CH, nos encontramos lejos de resolver aquel problema que tantos biógrafos han vinculado con la demencia que azotó las vidas de Cantor y Gödel, un problema que no sólo tiene impacto dentro de la teoría de conjuntos, sino también en el ámbito de la topología. Un problema que, al final de su vida, Gödel creía que era falso, al igual que Cohen o Woodin y que personas como Solomon Feferman consideran es irrelevante para la actividad práctica de las matemáticas. Quizá sólo el Axioma de elección ha levantado tanta polémica al interior de la teoría de conjuntos, pero son problemas como éstos, los que permiten descubrir nuevas regiones dentro de las matemáticas, realizar la visión que Cantor tenía respecto a la labor del matemático, a saber, superar y trascender, al menos en su imaginación, cualquier límite.

1: Realismo(s) matemático(s)

Quizá una de las dicotomías más antiguas en la historia de la filosofía sea el debate entre realismo/antirrealismo. Ya sea en ciencia, ética, estética, modalidad o en relación al estatus ontológico de las entidades abstractas, los filósofos se decantan por una postura realista o antirrealista que conforma el universo de su ontología. Un ejemplo claro de esto es el problema de los universales en la Edad Media, donde reflexiones de tipo metafísico, epistemológico y lógico, confluyeron para intentar resolver cómo es posible tener un conocimiento universal a partir de cosas particulares. Así, Boecio nos dice que un universal es una entidad común a varios particulares 1) en su totalidad y no sólo en parte; 2) de manera simultanea, no sólo como una sucesión temporal, y 3) constituye la sustancia de sus particulares[22]. Perteneciente a una clase similar al de los universales, el estatus ontológico de las entidades matemáticas ha representado un problema para la filosofía, siendo a finales del siglo XIX con la crisis de los fundamentos de las matemáticas donde la investigación acerca de este problema adquirió una mayor relevancia, principalmente bajo la insistencia de Gottlob Frege en que la objetividad y *aprioricidad* de las verdades de las matemáticas supone que los números no son ni entidades materiales ni ideas en la mente, sino que pertenecen a un "tercer dominio" distinto del mundo externo de lo sensible y del mundo interno de la consciencia.

Particularmente en el campo de la filosofía de las matemáticas, se puede establecer la dicotomía entre realismo/antirrealismo como el debate entre aquellos filósofos que aceptan la existencia de objetos abstractos y aquellos que la niegan. En teoría de conjuntos, el realismo es la doctrina que acepta la existencia de conjuntos, mientras que el antirrealismo la niega. A continuación presentaremos una taxonomía del realismo en la filosofía de las matemáticas.

1.1: Realismo(s)

Shapiro (1997) escribe sobre dos formas diferentes de comprender el realismo, a saber:

> The first is that mathematical objects exists independently of the minds, languages, and so on. Call this realism in ontology. The second theme is that mathematical statements have objective truth-values independent of the minds, languages, conventions, and so forth, of mathematicians. Call this realism in truth-value. (37).

Así, el realismo en ontología[23] busca comprometerse sólo con la existencia objetiva e independiente de los objetos matemáticos, mientras que el segundo, sólo se compromete con el

[22] *Cfr.* Klima: 2013.

[23] Utlizando los términos de Shapiro.

valor de verdad determinado, objetivo e independiente de las proposiciones que componen un sistema. Si bien es común que alguien que sostenga una postura realista en ontología sostenga una postura realista en valor de verdad, no es necesario que este sea el caso, por lo que alguien puede sostener una postura realista en un sentido y, a la vez, rechazar la otra. Esto nos permite una pluralidad de posturas realistas que sólo necesitan sostener en su base o la existencia objetiva de las entidades matemáticas o la existencia objetiva del valor de verdad acerca de las proposiciones en donde éstas se encuentran. En lo que sigue presentaremos un breve sumario de las más representativas.

1.1.1: Realismo robusto

En este apartado utilizaremos la caracterización del realismo en la filosofía de las matemáticas empleada por Penelope Maddy (2011) ya que no sólo nos sirve para introducir al realismo como postura filosófica, sino también porque nos permite conocer algunos modos de realismo no convencionales que, en palabras de Maddy, mantienen en su centro la práctica del matemático, en lugar de primar un análisis filosófico de las matemáticas, es decir, un análisis *a posteriori*, que es como tradicionalmente se ha presentado al realismo.

Así, el realismo robusto sería, *grosso modo* lo que conocemos normalmente como realismo en filosofía de las matemáticas, mientras que el realismo débil y el arrealismo serían la propuesta de Maddy para presentar una postura filosófica respecto a la naturaleza de las entidades matemáticas manteniendo el trabajo de los matemáticos que trabajan teoría de conjuntos en particular y la manera en que éstos llegan a postular nuevos axiomas como el modelo para un nuevo proyecto epistemológico, lo que Maddy llamará en un inicio *matemáticas naturalizadas* y después como el trabajo de la filosofía segunda en matemáticas.[24]

Como postura metafísica respecto a las entidades matemáticas, el realismo robusto puede establecerse a partir de las siguientes afirmaciones:[25]

- La realidad objetiva es la jerarquía acumulativa de conjuntos (Gödel).
- La realidad objetiva es una estructura teórico conjuntista (Shapiro).
- La realidad objetiva es el concepto de conjunto (Gödel).
- La realidad objetiva es el conjunto de algunos hechos únicamente modales (Hellman).
- La realidad teórico conjuntista es descrita por la ciencia natural (Gödel).

Esto es, el realismo robusto será la postura que mantenga la existencia de un mundo objetivo de objetos matemáticos, ya sean éstos números, conjuntos, funciones, etc. Desde un punto de vista metafísico, el realismo robusto es la posición más rica debido a la gran cantidad de

[24]Maddy utiliza este cambio de nombre para distanciarse de su inicial naturalismo fuertemente marcado por el proyecto del mismo nombre de Quine, y al tomar el nombre de "filosofía segunda" Maddy buscará establecer su postura como aquella que busca entender cómo estos objetos son utiizados por los matemáticos en sus respectivas teorías y cuál es el papel que éstos desempeñan en ellas, a diferencia de aquellas posturas filosóficas que abogan por un descubrimiento de la naturaleza de los números, en el caso de la filosofía de las matemáticas, en su sentido más fundamental.

[25]*cfr.* Maddy, 2011: 56.

entidades que pueden ser justificadas dentro de ésta, por lo que no es extraño que la mayoría de realismos dentro de la filosofía de las matemáticas (platonismo, psicologismo, fisicalismo) sean proyectos robustos dentro de la caracterización de Maddy. Más adelante veremos el caso particular del platonismo como una filosofía de las matemáticas siendo esta caracterización suficiente.

Sin embargo, Maddy nos dice que, en el caso de la teoría de conjuntos, el realismo robusto necesita dar razones no triviales sobre la confianza en los métodos teórico conjuntistas, razones que van más allá de lo que la teoría de conjuntos nos dice por sí sola. Burgess y Rosen escriben al respecto:

> Reality is [...]a system connected by causal relations and ordered by causal laws, containing entities ranging from the diverse inorganic creations and organic creatures that we daily observe and with which we daily interact, to the various unobservable causes of observable reactions that have been inferred by scientific theorists [...] (robust realists) hold that outside, above, and beyond all this (and here one gestures expansively to the circumambient universe) there is another reality, teaming with entities radically unlike concrete entities - and causally wholly isolated from them [...], between (us) and the other world [...] there is a great gulf fixed [...] surely (robust realists) owe us a detailed explanation of how anything we do here can provide us with knowledge of what is going on over there, on the other side of the great gulf. (en Maddy, 2011: 57)

Así, a pesar de ser un proyecto metafísico interesante, Maddy considera que lo que se necesita para sortear ciertos problemas del realismo es optar por una postura filosófica más humilde, es decir, no realizar un abordaje de las matemáticas desde el punto de vista del filósofo, sino acercarse a la práctica misma y observar cómo es que ésta se desarrolla, proponiendo entonces una epistemología y ontología moldeada por lo que el matemático realiza y no por lo que el filósofo considera que éste hace (o debería hacer).

1.1.2: Realismo débil

A diferencia de los compromisos que trae consigo el realismo robusto, Maddy nos presenta otra posibilidad de mantener un realismo sin tantos compromisos: el *realismo débil*, una versión del realismo que, en sus palabras, da razones genuinas de la naturaleza del lenguaje teórico conjuntista y su práctica, respetando la estructura actual de las justificaciones teórico conjuntistas. Esto es, el realismo débil no busca razones más allá de la teoría de conjuntos, sino que es dentro de ella misma donde se cuenta toda la historia. La teoría de conjuntos es vista como un cuerpo de verdades no sólo por las características sintácticas y estructurales que comparte con otros discursos, sino por las relaciones particulares que mantiene con la investigación empírica desde la que ésta comienza, así como la confianza en la autoridad de los métodos teórico conjuntistas al momento de determinar qué es verdadero y qué es falso respecto a los conjuntos.

Es en este punto en el que introduce su concepción de “filósofo segundo” como aquel que busca responderse preguntas como *¿Qué tipo de actividad es la teoría de conjuntos?*, *¿Cuáles son sus objetos de estudio?*, *¿Cuáles son sus métodos particulares y por qué son éstos y no otros?* Maddy dirá que este tipo particular de filósofo descubrirá que la manera correcta para saber acerca de los conjuntos es haciendo teoría de conjuntos. Así, un realista en el sentido débil que Maddy nos presenta sostendrá, en principio, que los conjuntos son aquello sobre lo que trata la teoría de conjuntos, lo que le permite:

1. Garantizar la objetividad tanto de la existencia como de la verdad dentro de la teoría de conjuntos.

2. Respetar los métodos actuales de la teoría de conjuntos.

3. Reconocer un valor determinado de ciertos problemas dentro de la teoría de conjuntos, como lo es el caso de la hipótesis del continuo.

Por lo que, mientras un filósofo, al imponer su postura metafísica, confunde los métodos actuales de la práctica matemática, el filósofo segundo se acerca en un primer momento a estos métodos, encuentra su utilidad dentro de la teoría y sólo a partir de este reconocimiento, construye una metafísica mínima que se adapte a éstos, o en palabras de Maddy "metaphysical considerations shouldn't be allowed to restrict the free pursuit of pure mathematics". (87)

1.1.3: Arrealismo

El caso del arrealismo es un poco diferente aunque al igual que el realismo débil, debemos entenderlo dentro del contexto de la "filosofía segunda" de Maddy. Un filósofo que opta por una postura arrealista considerará que las matemáticas son exitosas en sus propios términos, encontrándolas muy útiles para la práctica científica pero, al no ser confirmadas por sus métodos usuales, es decir, ni siquiera apelando al rol fundamental que desempeñan en las teorías empíricas, concluye que no tiene elementos para aceptar a sus objetos de estudio como reales o a sus argumentos como verdaderos, es decir, apelará a que la verdad o falta de ésta de las matemáticas es irrelevante al momento de explicar su aplicación en la práctica científica, o en palabras de Maddy:

> She (the second-philosophical arealist) doesn't come to her investigations with any a priori prejudice against abstract objects or with any preconceptions about what knowledge must be like that would seem to rule out knowledge of sets. She doesn't argue that set-theoretic knowledge is problematic or impossible on principle; she simply surveys the evidence at hand and concludes that it doesn't confirm the existence of sets or the truth of the theory of them. (97)

El arrealista no emite un juicio respecto a la ontología de las entidades matemáticas simplemente porque no tiene los elementos necesarios para hacerlo; sin embargo, esto no le impide aceptar que, a nivel de método y práctica, las matemáticas funcionan, por lo que, si bien en un nivel superficial, es distinto a el realismo débil, de fondo son compatibles, es decir, ambas posturas surgen de la práctica matemática misma. Al respecto, Maddy nos dice:

> If thin realism and arealism are equally accurate, second-philosophical descriptions of the nature of pure mathematics, just alternative ways of expressing the very same account of the objective facts that underlie mathematical practice, then we have here a form of objectivity in mathematics that doesn't depend on the

> existence of mathematical objects or the truth of mathematical statements, or even the non-existence of mathematical objects or the rejection of mathematical claims. This form of objectivity is, as you might say, post-metaphysical. Though it doesn't involve truths about a mathematical ontology, it does involve an array of facts like the sort of thing we roughly express by saying that the concept of group opens up a lot of deep mathematics. Indeed, it seems to fair to say that the objectivity of such facts is more robust than thin [...] This account of the objective underpinning of mathematics - the phenomenon of mathematical fruitfulness - is closer to the actual constraint experienced by mathematicians than any sense of ontology, epistemology or semantics; what presents itself to them is the depth, the importance, the illumination provided by a given mathematical concept, theorem, or method. A mathematician may blanch and stammer, unsure of himself, when confronted with questions of truth and existence, but on judgements of mathematical importance and depth he brims with conviction. For this reason alone, a philosophical position that puts this notion center stage should be worthy of our attention. (117)

Lo anterior nos sirve entonces para reconocer el estado actual del debate del realismo dentro de la filosofía de las matemáticas. Ahora nos detendremos en, quizá, la postura más conocida de realismo, a saber, el platonismo matemático.

1.2: Platonismo

Dentro de la postura realista se le conoce como *platonismo*[26] a la visión que sostiene la existencia de cosas como objetos abstractos, es decir, objetos que no existen en el espacio o el tiempo y que, por lo mismo, son no-físicos y no-mentales. Dependiendo de los objetos a los que caracterizemos como abstractos se delimitará el campo de nuestra ontología, ya sean estos mundos posibles (como en el caso de Alvin Plantinga), objetos lingüísticos como proposiciones (el caso de Bertrand Russell) o ficciones (el caso de Edward Zalta). Lo anterior permite a los filósofos sostener la existencia de cierto tipo de objetos abstractos sin que esto los comprometa a aceptar la existencia de otros, es decir, uno puede sostener la tesis de la existencia abstracta de las ficciones sin tener que aceptar la existencia de las proposiciones, por ejemplo. Se le conoce como *platonismo matemático* a la postura realista que cumple las siguientes características:

- **Tesis ontológica**: Los objetos matemáticos como números, conjuntos, etc., existen.
- **Tesis de independencia**: Estos objetos son independientes de agentes inteligentes y su lenguaje, pensamiento y prácticas.

[26]Si bien el "platonismo" se encuentra inspirado en la teoría de las formas de Platón, es complicado aceptar que éste mantendría todas las tesis que componen la versión contemporánea del platonismo, por lo que, siguiendo a Balaguer (1998) se distingue como "platonismo" a la visión metafísica contemporánea ("p" minúscula) del "Platonismo" ("P" mayúscula) que queda reservado para la filosofía de Platón.

- **Tesis semántica**: Las afirmaciones matemáticas son verdaderas o falsas dependiendo de las propiedades de estas entidades, independientemente de si podemos conocer su verdad o falsedad.

- **Tesis de abstracción**: Estos objetos existen fuera del espacio y el tiempo, lo que los vuelve no físicos, no mentales y causalmente inertes, es decir, no entran en relaciones causales con otros objetos.

De manera que el platonismo matemático es un tipo de realismo robusto tanto en valor de verdad como en ontología. Es importante remarcar que, hasta finales del siglo XX, el platonismo matemático era la postura más común entre los matemáticos y físicos teóricos, siendo reciente el surgimiento de distintas posiciones filosóficas respecto a las matemáticas que han significado un desafío para el platónico contemporáneo. Tan sólo recordemos como desde mediados del siglo XX, Bernays nos decía sobre el platonismo "this application (platonism) is so widespread that it is not an exaggeration to say that platonism reigns today in mathematics" (en Benacerraf, 1964: 276). De igual modo, resaltaba la importancia de la visión platónica al decir:

> The value of platonistically inspired mathematical conceptions is that they furnish models of abstract imagination. These stand out by their simplicity and logical strength. They form representations which extrapolate from certain regions of experience and intuition. (275)

Actualmente podemos decir que existe un platonismo orientado a objetos, es decir, donde se sostiene la existencia de objetos como números, conjuntos, funciones, etc., y un platonismo orientado hacia las estructuras donde lo importante son las relaciones y posiciones que estos objetos ocupan. Si bien dentro de ambas posturas encontramos autores que mantienen mayores compromisos que otros, es el platonismo pleno de autores como Balaguer, Zalta y Linsky el que, sin lugar a dudas, mantiene el grado máximo de compromisos ontológicos al postular, *grosso modo*, la existencia de todos los objetos matemáticos posibles. Podemos entender simbólicamente lo anterior como:

$$(\exists x)(Mx) \wedge (\forall Y)[\diamond(\exists x)(Mx \wedge Yx) \rightarrow (\exists x)(Mx \wedge Yx)]$$

donde x es una variable de primer orden, Y es una variable de segundo orden, Mx es "x es un objeto matemático" y $\diamond$ es posibilidad lógica. Siguiendo a Balaguer (1998) el argumento a favor del platonismo pleno se estructura como:

1. Los platonistas plenos pueden dar cuenta del hecho que los humanos pueden - sin establecer contacto con el universo matemático - formular teorías matemáticas puras.

2. Los platonistas plenos pueden dar cuenta del hecho que los humanos pueden - sin establecer contacto con el universo matemático - conocer la consistencia de varias de estas teorías matemáticas puras.

3. Si (2) es verdadera, los platonistas plenos pueden dar cuenta del hecho que (como una regla general) si un matemático acepta una teoría matemática pura T, entonces T es consistente.

   Por lo tanto,

4. Los platonistas plenos pueden dar cuenta del hecho que (como una regla general) si un matemático acepta una teoría matemática pura T, entonces T es consistente.

5. Si el platonismo pleno es verdadero entonces toda teoría matemática pura que sea consistente describe de manera correcta el universo matemático, esto es, describe correctamente alguna colección de objetos matemáticos.

   Por lo tanto,

6. Los platonistas plenos pueden dar cuenta del hecho que (como una regla general) si los matemáticos aceptan una teoría matemática pura T, entonces T describe de manera correcta parte del universo matemático.

Como veremos más adelante, los argumentos que presenta el platonismo pleno son bastante fuertes, incluso para los estándares del platonismo matemático convencional, por lo que nos sirve sólo como un ejemplo del tipo de riesgos que se están dispuestos a tomar con tal de salvaguardar la integridad el platonismo matemático como postura metafísica. A continuación presentaremos los argumentos usuales a favor del platonismo así como sus críticas más fuertes, teniendo en cuenta que, dentro de esta taxonomía de realismo - platonismo, podemos encontrar los elementos que Gödel utilizará para justificar tanto la importancia de sus teoremas de incompletud como el proyecto para buscar nuevos axiomas para la teoría de conjuntos.

1.2.1: Argumentos de Frege a favor del platonismo

Si bien posturas realistas y platonistas respecto a la naturaleza de las entidades matemáticas han existido desde la antigüedad, le debemos a Gottlob Frege su formulación contemporánea y serán su *der Grundlagen die Arithmetik* (1884), su *Grudgesetze der Arithmetik* (1903) y su proyecto logicista contra quienes la mayoría de los primeros filósofos de las matemáticas (en su sentido contemporáneo) discutirán. A continuación presentaremos el argumento presentado por Frege en 1884 así como su reformulación por parte de Balaguer (1998, 2008) y Linnebo (2013).

Sin lugar a dudas, la tesis más fuerte por parte de Frege es su caracterización del número como la extensión de un concepto, dando especial énfasis a la *aespacialidad* de éstos. Al respecto, escribe en §61:

> But, one might object, even if the earth is really unimaginable, still it is an external thing having a definite place. Where, however, is the number 4? It is neither outside of us nor inside of us. Taken in spatial terms, this is correct. A determination of the place of the number 4 makes no sense. But, from this it follows only that the number 4 is not a spatial object, not that it is no object at all. Not every object is somewhere. Even our mental pictures are in this sense not in us (subcutaneously) [...] Not every objective object has a place. (1980: 72)

Tomando como base la estructura lógica '*a* es abarcado por *F*'[27] Frege presentará su propuesta sobre el concepto de número. Es importante remarcar que Frege acuñará el término

[27]La expresión que se utiliza en la traducción al inglés es '*a* falls under *F*', mientras que en el original alemán,

"gleichzählig", traducido como *equinumeroso*, para establecer la posibilidad de una correlación uno a uno entre distintos objetos que son abarcados por un concepto. Así, puede presentar su definición como "el número que se aplica al concepto F es la extensión del concepto 'concepto equinumeroso con el concepto F' ", siendo además el número no una colección de cosas o una propiedad de tal colección, sino que afirma algo objetivo acerca de un concepto. Del mismo modo, contrario a visiones psicologistas del número, éste no es el producto subjetivo de los procesos mentales, siendo para nosotros objetos reconocibles a pesar de no tener espacialidad o carecer de "fisicalidad" e ir más allá de lo que se nos aparece en la imaginación (§106: 1980).

Ahora bien, lo anterior puede reformularse de distintas maneras. Balaguer (1998) lo presenta como sigue:

1. La única manera que tenemos para dar cuenta de la verdad de nuestras teorías matemáticas es adoptar el platonismo como nuestra ontología.

2. La única manera que tenemos para dar cuenta del hecho que nuestras teorías empíricas son aplicables o indispensables para nuestra ciencia empírica es admitir que éstas son verdaderas.

   Por lo tanto

3. El platonismo es verdadero. (95)

En 2008, sin embargo, reformulará el argumento de Frege en los términos presentados a continuación:

1. Nuestras teorías matemáticas son extremadamente útiles en la ciencia empírica, de hecho, podríamos decir que son indispensables para éstas, y que la única manera que tenemos para dar cuenta de ésto es admitiendo que nuestras teorías matemáticas son verdaderas. Por lo tanto,

2. Las oraciones de nuestras teorías matemáticas - oraciones como '3 es un número primo' - son verdaderas. Además, parece que

3. Oraciones como '3 es un número primo' deben ser leídas literalmente ('at face value'), es decir, tomando como base para la oración '3 es un número primo' la forma lógica 'a es F' donde a es una constante y F un predicado.

4. Si permitimos que oraciones como '3 es un número primo' sean verdaderas, añadiendo además que éstas sean leídas literalmente ('at face value'), estamos comprometidos a creer en la existencia de los objetos sobre las que estas oraciones hablan.

5. Si existen cosas como los objetos matemáticos, es decir, objetos sobre los cuáles tratan nuestras teorías matemáticas, éstos son abstractos, es decir, éstos no son objetos ni físicos ni mentales.

Frege utiliza la expresión "fällt unter". Utilizo la expresión "es abarcado por" para, en primer lugar, mantener la dirección del argumento, es decir, de a en F y porque, a mi parecer, la expresión "cae bajo" no es muy común en el idioma español.

6. Por lo tanto existen cosas como los objetos matemáticos abstractos y nuestras teorías matemáticas nos dan descripciones verdaderas acerca de ellos. En otras palabras, el platonismo matemático es verdadero.

El argumento de Frege, según Balaguer, contiene lo que después será conocido como el argumento de indespensabilidad de Quine-Putnam en el cual nos detendremos más adelante. Por su parte, Linnebo (2013) nos presenta el argumento de Frege de la siguiente manera: el lenguaje de las matemáticas tiene como propósito referir y cuantificar sobre objetos matemáticos abstractos. Un gran número de teoremas matemáticos son verdaderos, pero una oración no puede ser verdadera a menos que sus sub-expresiones cumplan con el objetivo para el cuál fueron establecidas. Por lo tanto, existen los objetos matemáticos abstractos sobre los que refieren y cuantifican estas expresiones. Así, Linnebo afirma que el argumento de Frege se sostiene en dos premisas, a saber, una que tiene que ver con la semántica del lenguaje de las matemáticas (lo que llamará "semántica clásica") y otra que tiene que ver con nuestra noción de verdad. La semántica clásica asume que los términos singulares del lenguaje de las matemáticas tienen como propósito el referir a objetos matemáticos, siendo abarcados por los cuantificadores de primer orden de este lenguaje. Mientras que la segunda premisa sostiene que la mayoría de nuestras oraciones matemáticas que son aceptadas como teoremas son verdaderos, esto sin importar su estructura sintáctica o semántica.

Sobre la primera premisa no hay mucho que decir. Frege estaría estableciendo una analogía entre el funcionamiento semántico del lenguaje de las matemáticas y el lenguaje en general, es decir, ambos utilizan términos y cuantificadores que refieren y abarcan sobre los objetos. Linnebo nos recuerda en este punto que el apelar a la semántica clásica tiene una finalidad hermenéutica, es decir, se pretende describir cómo cierto lenguaje es utilizado, no como una norma según la cual el lenguaje deba ser utilizado. Para defender la segunda premisa, Linnebo establece que hay al menos tres posibilidades: apelar a algo más fundamental que las matemáticas mismas (como fue el caso del proyecto logicista del que Frege fue uno de sus más importantes defensores), apelar a los estándares de la ciencia empírica y su relación con las matemáticas (lo que constituirá el argumento de indespensabilidad de Quine - Putnam) y la tercera sería apelar a los estándares de las matemáticas mismas (el camino que seguirá Maddy en su proyecto de "naturalismo matemático").

Otra manera que Linnebo utiliza para establecer el argumento de Frege es vincularlo con el criterio quineano de compromiso ontológico. A grandes rasgos, el criterio de Quine nos dice que una oración de primer orden (o colección de varias de éstas) está ontológicamente comprometida con tales objetos ya que, se supone, éstos se encuentran dentro del rango de las varibles para que esta oración (o colección de varias de éstas) sea verdadera o, en palabras de Linnebo:

> [...] it follows from **Classical Semantics** that many sentences of mathematics are ontologically committed to mathematical objects. To see this, consider a typical mathematical theorem *S*, which involves some normal extensional occurrence of either singular terms or first-order quantifiers. By **Classical Semantics**, these expressions purport to refer to or range over mathematical objects. For *S* to be true, these expressions must succeed in doing what they purport to do. Consequently, for *S* to be true, there must be mathematical objects in the range of the variables.

> By *Quine's Criterion* this means that S is ontologically committed to mathematical objects. (2013)

Es obvio que Frege no estableció su argumento utilizando el criterio de compromiso ontológico de Quine, pero éste nos sirve para poder vincularlo con, quizá, el argumento más fuerte que tiene el platonismo para justificar la existencia de los objetos matemáticos abstractos, a saber, el argumento de indespensabilidad de Quine - Putnam.

1.2.2: Argumento de indespensabilidad de Quine - Putnam

Una de las características más importantes de las matemáticas es su capacidad para ser aplicadas en las ciencias empíricas, brindando predicciones y herramientas necesarias para construir teorías de una manera más elegante y económica. Partiendo de esto, uno de los argumentos más importantes para defender posiciones realistas dentro de la filosofía de las matemáticas es apelando a la indespensabilidad de éstas, y le debemos a Quine y a Putnam la versión más conocida de éstos. A grandes rasgos, cuantificar sobre o hacer referencia a entidades matemáticas como conjuntos, funciones, números, etc, es indispensable para nuestras mejores teorías científicas, por lo que debemos comprometernos con la existencia de éstas, es decir, la indespensabilidad de las matemáticas en las ciencias empíricas es razón suficiente para creer en la existencia de tales entidades. De igual modo, epistemológicamente, las entidades matemáticas se encuentran en el mismo nivel que otras entidades teóricas en la ciencia ya que la misma evidencia que nos sirve para confirmar una nos sirve para confirmar la otra, esto debido a la confirmación de una teoría como un todo.

El argumento presentado por Quine (1961) puede presentarse como:

1. Debemos tener compromisos ontológicos con todas aquellas entidades que son indispensables a nuestras mejores teorías científicas.

2. Las entidades matemáticas son indispensables para nuestras mejores teorías científicas.

3. Por lo tanto, debemos tener compromisos ontológicos con (algunas) entidades matemáticas.

Mientras que el argumento de Putnam (1979) se estructuraría así:

1. Debemos comprometernos con la verdad de cualquier afirmación que juegue un papel indispensable en nuestras mejores teorías científicas.

2. Las afirmaciones matemáticas juegan un papel indispensable en nuestras mejores teorías científicas.

3. Por lo tanto, debemos creer en la verdad de (algunas) afirmaciones matemáticas.

Siguiendo a Ginammi (2016), es fácil ver cómo existe una diferencia sutil entre el argumento presentado por Quine y el presentado por Putnam, a saber, mientras el primero nos brinda argumentos a favor de un realismo de corte metafísico, el segundo lo hace a favor de un realismo semántico. Unificando ambos, Colyvan (2015) elabora el argumento en su versión más conocida, esto es:

P1 Debemos tener compromisos ontológicos con todas y cada una de las entidades que son indispensables para nuestras mejores teorías científicas.

P2 Las entidades matemáticas son indispensables para nuestras mejores teorías científicas.

C Por lo tanto, debemos tener compromisos ontológicos con las entidades matemáticas.

Establecido de esa manera, el argumento de indespensabilidad no sólo nos sirve para justificar la existencia de entidades matemáticas (suficiente para sostener un realismo), sino que, por su misma estructura, parece obligar a posturas nominalistas dentro de la filosofía de las matemáticas a aceptar la existencia de éstas ya que los nominalistas usan un argumento parecido al argumento de Quine-Putnam para mantener un realismo respecto a otras entidades teóricas, como lo son los quarks o los electrones, por lo que, siguiendo la línea de razonamiento, deberían aceptar la existencia de las entidades matemáticas, así Quine nos dice:

> Ordinary interpreted scientific discourse is as irredeemably committed to abstract objetcs - to nations, species, numbers, functions, sets - as it is to apples and other bodies. All these things figure as values of the variables in our overall system of the world. The numbers and functions contribute just as genuinely to physical theory as do hypothetical particles. (1981: 171)

Previamente, en 1953, ya nos había dicho que:

> A theory is committed to these and only those entitities to which the bound variables of the theory must be capable of referring in order that the affirmations made in the theory be true [...] Our acceptance of an ontology is, I think, similar in principle to our acceptance of a scientific theory, say a system of physics: we adopt, at least insofar as we are reasonable, the simplest conceptual scheme into which the disordered fragments of raw experience can be fitted and arranged. Our ontology is determined once we have fixed upon the overall conceptual scheme which is to accommodate science in the broadest sense; and the considerations which determine a reasonable construction of any part of that conceptual scheme, for example, the biological or the physical part, are not different in kind from the considerations which determine a reasonable construction of the whole. To whatever extent the adoption of any system of scientific theory may be said to be a matter of language, the same - but no more - may be said of the adoption of an ontology. (192 - 194)

Ahora bien, es necesario entender que para poder establecer un argumento como el de Quine - Putnam que sea lo suficientemente convincente, debemos partir de un naturalismo como marco teórico. Sobre ésto, Quine nos dice:

> ... naturalism: abandonment of the goal of a first philosophy. It sees natural science as an inquiry into reality, fallible and corrigible but not answerable to any supra-scientific tribunal, and not in need of any justification beyond observation and the hypothetico - deductive method ... The naturalistic philosopher begins

> his reasoning within the inherited world theory as a going concern. He tentatively believes all of it, but believes also that some unidentified portions are wrong. He tries to improve, clarify, and understand the system from within. He is the busy sailor adrift on Neurath's boat. (1981: 72)

Así, un filósofo que siga el naturalismo de Quine, puede ser crítico de la práctica científica solamente desde un punto de vista científico, es decir, como un científico lo haría. En cambio, según Colyvan, el naturalismo es la posición que sostiene que no hay una "filosofía primera", sino que la tarea de la filosofía va de la mano con la investigación científica, en este sentido, para un naturalista la filosofía no es ni previa ni más importante que la ciencia, sino que es a partir de este trabajo continuo entre ciencia y filosofía que podemos conseguir una visión completa del mundo. Desde un nivel metafísico son nuestras mejores teorías científicas las que nos indican qué es lo que existe o, más bien, qué es lo que debemos creer que existe, siendo de alguna manera la guía con la que nos es posible descartar todo aquello que no proceda de manera científica al momento de determinar lo que existe. En cambio, desde un punto de vista lógico es muy sencillo saber con cuáles entidades estamos comprometidos ontológicamente, esto desde el hecho que, para Quine, el lenguaje con el que debemos regular nuestras creencias científicas es el de la lógica de primer orden, por lo que solamente debemos observar qué oraciones de la forma $\exists x$ Fx son comprendidas por nuestras creencias, siendo a este nivel donde podemos preferir una teoría por sobre otra.

Colyvan utiliza este punto para introducir otra noción importante en la construcción de un argumento como el de Quine-Putnam, a saber, la idea quineana de holismo. Siguiendo a Quine, podemos establecer dos tipos de holismo: 1) el holismo confirmacional y 2) el holismo semántico. De acuerdo al primero, las teorías son confirmadas o no como un todo, es decir, si encontramos evidencia empírica que confirme una parte de la teoría, la totalidad de la teoría es confirmada. Por lo mismo, siguiendo el argumento de Quine-Putnam, la parte de las matemáticas que estén siendo utilzadas por esa teoría son, a su vez, confirmadas. Esto es a lo que se le llama la tesis de Duhem-Quine. Por su parte, el holismo semántico mantiene que la unidad de significado no se encuentra en oraciones por separado, sino en el sistema de oraciones o, en ciertos casos, el sistema lingüístico completo. Siguiendo, de nuevo, esta argumentación, las matemáticas que han sido aplicadas en la teoría son confirmadas junto con la teoría física en la que figuran. Sobre esto escribe Quine:

> The situation may seem to be saved, for ordinary hypotheses in natural science, by there being some indirect but eventual confrontation with empirical data. However, this confrontation can be remote: and, conversely, some such remote confrontation with experience may be claimed even for pure mathematics and elementary logic. The semblance of a difference in this respect is largely due to overemphasis of departamental boundaries. For a self-contained theory which we can check with experience includes, in point of fact, not only its various theoretical hypotheses of so-called natural science, but also such portions of logic and mathematics as it makes use of. (1976: 121)

Quizá el punto más importante aquí sea aclarar qué signifca ser indispensable para una teoría científica, a lo que Colyvan nos dice que es ser aquello que apoya a los *desiderata standard* de lo que se considera una buena teoría científica, es decir, al éxito empírico, la capacidad de unificar distintas partes de una teoría, simplicidad, fertilidad, capacidad de explicación, entre otros, esto es, una entidad ξ que aparece en una teoría T puede ser considerada indispensable sólo cuando su eliminación de T produce una nueva teoría T' que puede ser equivalente a T pero es menos preferible que T, vinculando entonces la noción de indispensabilidad con la preferencia entre dos o más teorías. En este punto la crítica de Maddy (1992) se vuelve importante porque, manteniéndose dentro del trasfondo naturalista, busca ampliar el rango de objetos que pueden justificarse a través del argumento de Quine - Putnam, principalmente los objetos presentes en el estudio de la teoría de conjuntos en sus estadios más abtractos. Lo anterior se vuelve importante ya que el mismo Quine llegó a decir que las partes más "alejadas" de la teoría de conjuntos son mera recreación matemática sin compromisos ontológicos, ya que no tienen ningún tipo de aplicación física negando, por ejemplo, entidades como $\beth_\omega$ o números inaccesibles. Maddy, al respecto, nos comenta que dentro de la teoría de conjuntos se apelan a distintos argumentos no demostrativos para apoyar los axiomas comunes, lo que sirve para implicar de manera lógica la existencia de entidades como $\beth_\omega$. Lo anterior le permite establecer que los argumentos de indespensabilidad standard no dan cuenta de la práctica matemática real, negando prácticas matemáticas aceptadas con base en argumentos no matemáticos por lo que, para ser coherente con un naturalismo como marco teórico, debemos modificar nuestro argumento de indespensabilidad para aceptar los métodos actuales que los matemáticos utilizan en su práctica diaria, es decir, debemos extender el rango de nuestra limitante de sólo aceptar las matemáticas que son aplicadas en nuestras teorías científicas más exitosas. Maddy nos dice:

> Mathematicians believe the theorems of number theory and analysis not to the extent that they are useful in applications but insofar as they are provable from the appropiate axioms. To support the adoption of these axioms, number theorists and analysts may appeal to mathematical intuition, or the elegant systematization of mathematical practice, or other intramathematical considerations, but they are unlikely to cite successful applications. (279)

Así, o modificamos nuestro argumento de indespensabilidad o lo rechazamos como garante de nuestra ontología matemática. Uno puede modificar el argumento de varias maneras pero es a través de una cadena de implicaciones causales que resulta posible manter la fuerza del argumento sin sacrificar nuestra ontología inicial caracterizada por la aplicabilidad de las matemáticas en las ciencias empríricas. De este modo podemos reconocer a las matemáticas de lo contínuo como una de las ramas más aplicadas de las matemáticas, siendo algunas de las teorías físicas donde son empleadas de las que tenemos mayor confirmación hasta ahora. Dado que estamos comprometidos a aceptar las entidades que postulan nuestras teorías científicas más exitosas y las entidades presentes en las matemáticas de lo contínuo son algunas de ellas, parece que estamos comprometidos a aceptar la existencia, por ejemplo, de los números reales. Dado que, a su vez, en algunas de estas teorías se cuantifica sobre conjuntos de reales (y ya aceptamos su existencia) deberíamos entonces aceptar preguntas como ¿son los conjuntos Σ^1_2 Lebesgue medibles? Nuestra ontología ahora ha sido extendida y hemos conseguido integrar una pregunta que es independiente de nuestro sistema de axiomas convencional para la teoría de conjuntos, **ZFC**. Sobre la segunda opción, Maddy escribe:

> The scientific practice objection, notes that indespensability for scientific theorizing not always imply truth and calls for a careful assessment of the extent to which even fundamental mathematized science is "idealized" (i.e., literally false) [...] the mathematical practice objection, suggests that indispensability theory cannot account for mathematics as it is actually done. If these objections can be sustained, we must conclude that the indispensability arguments do not provide a satisfactory approach to the ontology or epistemology of mathematics. (1992: 289)

Lo que parece implicar en este último punto es que, argumentos como el de Quine-Putnam pueden establecer una división entre lo que es matemáticamente verdadero y lo que es matemáticamente correcto, por lo que, quizá, deban ser revisados a mayor profundidad para lograr una mejor congruencia ante esta dicotomía. A pesar de esto, los argumentos de indispensabilidad son el tipo de argumentos más fuertes que tienen los realistas, por lo que, a pesar de tener sus dificultades, no deben ser tomados a la ligera al momento de justificar nuestra ontología.

1.3: Las críticas de Benacerraf

Entre las décadas de los 60's y 70's el filósofo norteamericano Paul Benacerraf publicó un par de artículos que causaron revuelo en la comunidad de la filosofía de las matemáticas. *Grosso modo*, en "What Numbers Could not Be" (1965), Benacerraf se propone dar argumentos en contra de las posturas filosóficas que consideran a los objetos matemáticos, principalmente números o conjuntos, como *objetos*, mientras que en "Mathematical Truth" (1973), Benacerraf nos presenta un dilema: lo que es necesario para la verdad matemática vuelve al conocimiento matemático imposible.

Algo que debemos recordar al momento de realizar la lectura de los textos de Benacerraf y, en general, la bibliografía sobre filosofía de las matemáticas en la década de los 60's en los Estados Unidos, es la enorme influencia que tuvo sobre el campo el pensamiento de W. O. Quine y su visión de la reducción ontológica en matemáticas, así como el intento por recuperar el proyecto logicista pero ahora desde un punto de vista más cercano a la teoría de conjuntos. Justo lo que Benacerraf recuperará en su escrito de 1965 son los argumentos de Quine, y ésto no sólo para criticar las posturas realistas sobre la ontología de los objetos matemáticos, sino también para argumentar a favor de las posturas ordinalistas sobre las cardinalistas al momento de definir la "esencia" del número.

Para poder establecer su tesis, Benacerraf presenta un experimento tomando como base la construcción conjuntista de los números naturales ($\mathbb{N}$) según diferentes teorías axiomáticas de conjuntos, a saber, la versión de Zermelo y la versión de von Neumann. El experimento es el siguiente: imaginemos una disputa entre los hijos de dos respetables lógicos, Ernie y Johnny, sobre si el número 3 pertenece o no al número 17. Como es sencillo de suponer, Ernie dirá que si, mientras que Johnny dirá que no. ¿Por qué sucede esto? Ernie apela a un teorema según el cual para cualesquiera dos números, x y y, x es menor que y sí y sólo si x pertenece a y y si x es un subconjunto propio de y. Ahora, como todos aceptamos que 3 es menor que 17 se sigue que 3 pertenece a 17. En cambio Johnny, sostiene que el teorema de Ernie es equivocado, ya que dados dos números x y y, x pertenece a y sí y sólo si y es el sucesor de x.

Es justamente en la noción de sucesor donde empiezan a surgir problemas ya que, mientras para Ernie el sucesor de un número x es el conjunto que consiste en x y todos los miembros de x, para Johnny el sucesor de x es simplemente $[x]$, es decir, el unitario de x. Visto de manera conjuntista tenemos entonces que el número 3 es:

$$\text{Ernie: } [\emptyset], [\emptyset, [\emptyset]], [\emptyset, [\emptyset], [\emptyset, [\emptyset]]], \ldots$$
$$\text{Johnny: } [\emptyset], [[\emptyset]], [[[\emptyset]]], \ldots$$

O como nos diría Benacerraf:

> Ernie had been able to prove that a set had n members if and only if it could be put into one-to-one correspondence with the set of numbers less than or equal to n. Johnny concurred. But they disagreed when Ernie claimed further that a set had n members if and only if it could be put into one-to-one correspondence with the number n itself. For Johnny, every number is single membered. In short, *their cardinality relations were different.* (55)

Esto es, mientras que para Ernie "17" tiene 17 elementos, para Johnny "17" sólo tiene uno. Claramente esto nos mete en graves apuros, en el problema del polimorfismo conjuntista del que ya Quine había hablado y coloca las posiciones realistas en filosofía de las matemáticas en un serio problema ya que, para Benacerraf, el descubrimiento de este desacuerdo sobre qué conjuntos son los números en particular debe llevarnos, necesariamente, a rechazar la premisa de que cada número es algún conjunto en particular e, incluso, la premisa de que un número sea un objeto en específico, ya que "if the numbers constitute one particular set of sets, and not another, then there must be arguments to indicate which. How then might one distinguish the correct account from all the possible ones? Is there a set of sets that has a greater claim to be the numbers than any other? Are there reasons one can offer to single out that set?". (58)

Llevando el análisis a un nivel lingüístico, Benacerraf nos dice:

> The two accounts agree in overall structure. *They disagree when it comes to fixing the referents for the terms in question.* Given the identification of the numbers as some particular set of sets, the two accounts generally agree on the relations defined on that set; under both, we have what is demonstrably a recursive progression and a successor function which follows the order of that progression. Furthermore, the notions of cardinality are defined in terms of the progression, insuring that it becomes a theorem for each n that a set has n members if and only if it can be put into one-to-one correspondence with the set of numbers less than or equal to n. Finally, the ordinary arithmetical operations are defined for these "numbers". They do differ in the way in which cardinality is defined, for in Ernie's account the fact that the number n had n members was exploited to define the notion of having n members. In all other respects, however, they agree. (56 - 57)

Esto es, al diferir en la manera en que ambas posiciones caracterizan la noción de cardinalidad, el argumento de Benacerraf ha encontrado su piedra de toque en el polimorfismo conjuntista. Es justo en este punto donde la discusión se enmarca en la teoría del sentido y la referencia de Gottlob Frege ya que cada explicación del número debe asignar no sólo el sentido de las diferentes expresiones, sino también su referencia, y parece claro que la construcción de Johnny y la de Ernie difieren en ésta. Pero la postura de Frege respecto a los números no parece ser la adecuada para afrontar el problema, ya que para él los números son extensiones de conceptos, es decir, 3 es la extensión del concepto "equivalente con algún conjunto de 3 miembros". Del mismo modo, para Frege existe un mundo de objetos, los *designata* o referentes de los nombres, descripciones, donde la relación de identidad[28] tiene, por así decirlo, *licencia*, de modo que tiene sentido el preguntarse sobre si cualesquiera dos nombres (o descripciones) éstos nombran o no el mismo objeto o a diferentes[29]. No lo es así en el caso de Benacerraf, ya que para él "«Entity», «Thing», «Object», are words having a role in the language; they are place fillers whose function is analogous to that of pronouns (and, in more formalized contexts, to variables of quantification)". (66)

Así Benacerraf concluye este apartado diciéndonos:

> Numbers could not be sets at all - on the grounds that there are no good reasons to say that any particular number is some particular set. [...] One who identifies 3 with some particular set does so for the purpose of presenting some theory and does not claim that he has discovered which object 3 really is. (67 - 68)

Claramente las posturas realistas que consideran a los números (o a los conjuntos) como objetos, se enfrentan al problema de establecer sobre qué están construyendo su ontología si lo que quieren es conservar esa caracterización pero escapar del argumento de Benacerraf.

Posteriormente, Benacerraf presentará su propuesta. Habiendo aceptado que los números no son objetos, le es posible recuperar el argumento de Quine según el cual lo único necesario para caracterizar a los números es una progresión que sirva como su base, así como la reducción ontológica de las matemáticas y esto porque, según escribe "the mathematician's interests stops at the level of structure. If one theory can be modeled in another (that is, reduced to another) then further questions about whether the individuals of one theory are really those of the second just do not arise" (69). La propuesta benacerrafiana nos mete de lleno en otra de las grandes dicotomías dentro de la filosofía de las matemáticas, precisamente el debate entre la primacía de lo cardinal sobre lo ordinal (o viceversa), en nuestra concepción del número. Al proponer a las progresiones como la base de los números, su posición dentro del debate es más que obvia: Benacerraf se colocará, junto con autores como Quine, Parsons, Goddard o el mismo Dedekind, dentro del campo ordinalista, mientras que autores como Cantor y Russell defenderán la postura cardinalista. Sobre las secuencias[30], Benacerraf nos dirá:

[28]Sobre los enunciados de identidad Benacerraf escribe lo siguiente: "Identity statements make sense only in contexts where there exists possible individuating conditions. If an expression of the form "$x = y$" is to have sense, it can be only in contexts where it is clear that both x and y are of some kind of category C, and that it is the conditions which individuate things as the same C which are operative and determine its truth value." (64 - 65)

[29]Siguiendo a Rodríguez Consuegra (1991) es importante recordar que la finalidad del proyecto logicista no era interpretar los números como "objetos", más bien, esto era una consecuencia necesaria de reducir las proposiciones de la aritmética a las leyes de la lógica, principalmente bajo la idea que la lógica debía contener verdades y no simplemente meros condicionales.

[30]El énfasis de Benacerraf en la noción de "estructura abstracta" como el elemento de fondo, incluso, de las progresiones, será uno de los elementos más importantes recuperados por la visión estructuralista que, dentro de la filosofía de las matemáticas, es defendida principalmente por Shapiro, Hellman y Resnik, donde lo que

> [...] any system of objects, whether sets or not, that forms a recursive progression must be adequate. Is not any condition on the objects (that is, on the set) but rather a condition on the relation under which they form a progression. Any recursive sequence whatever would do suggest that what is important is not the individuality of each element but the structure which they jointly exhibit [...] Numbers are not objects at all, because in giving the properties (that is, necessary and sufficient) of numbers you merely characterize an abstract structure - and the distinction lies in the fact that the "elements" of the structure have no properties other than those relating them to other "elements" of the same structure. (68 - 70)

Quizá los defensores de la posición ordinalista más famosos sean Dedekind y Peano, quienes además han brindado algunos de los argumentos más convincentes para adoptar esa postura sobre la cardinalista. Siguiendo a Rodríguez Consuegra (1991) el trabajo de Dedekind consistió en la reducción de los números a una estructura regida por ciertas nociones, particularmente las de "cosa", "sistema" y "aplicación"[31] entre distintos sistemas, siendo además definida por los axiomas de Peano[32]. Los axiomas le servirán a Dedekind para determinar una estructura específica, el *sistema simplemente infinito*, del cual los números son sólo una de varias interpretaciones de tal sistema. Este tipo de abstracción no afectaba la noción de orden por lo que para Dedekind[33] el sistema de números naturales (o de números en general) es el de los ordinales. De nuevo Rodríguez Consuegra nos presenta, de manera más esquemática, la postura de Dedekind al enumerarla como:

1. Los números, en lo que respecta a la aritmética, no son más que elementos cuya naturaleza es sólo aquella definida por sus lugares en la correspondiente serie.

2. Que tales lugares se determinan sólo a través de las relaciones entre ellos.

3. Que la aritmética tiene por único objeto el estudio de ese conjunto de relaciones o estructura.

se vuelve importante en una revisión acerca de la naturaleza de los "objetos" de una teoría matemática es la manera en que estos "objetos" se relacionan entre ellos. Se vuelve curioso el uso del término "objeto" ya que éstos (números, conjuntos, funciones, puntos, etc.), carecen de una naturaleza intrínseca, siendo simplemente una posición dentro de una estructura matemática. De igual modo, en uno de esos desafortunados episodios de la historia de las ideas, el mismo argumento que utilizó Benacerraf para poner en jaque a las posturas realistas (en especial la platonista) dentro de la filosofía de las matemáticas fueron utilizados por algunos estructuralistas para sostener una especie de "estructuralismo platonista" donde estructuras matemáticas como la de los números naturales o el espacio euclídeo existen de manera objetiva e independiente de aquel que las estudia.

[31]Sus equivalentes en el léxico actual son elemento, clase o conjunto y transformación o correspondencia, respectivamente.

[32]Debemos recordar que una de las diferencias entre los principios postulados por Dedekind y Peano es que, para el primero, la inducción matemática debía probarse.

[33]"Si en la consideración de un sistema simplemente infinito N ordenado mediante una transformación ϕ descartamos enteramente el carácter especial de los elementos, reteniendo simplemente su distinguibilidad y teniendo en cuenta sólo las relaciones mutuas en que la transformación ordenadora ϕ los coloca, entonces esos elementos se llaman números naturales o números ordinales o simplemente números [...] Las relaciones o leyes que se derivan enteramente de las condiciones [los axiomas] y por tanto son siempre las mismas en todos los sistemas simplemente ordenados, cualesquiera nombres pueda suceder que se les dé a los elementos individuales, constituyen el primer objeto de la ciencia de los números o aritmética" (en Rodríguez Consuegra, 1991: 54).

Peano, por su parte, sostuvo que existe una cantidad infinita de sistemas que satisfacen sus axiomas[34], por lo que éstos son presentados en términos puramente abstractos, esto es, sin referencia alguna a las nociones primitivas aritméticas. De esta manera, para Peano, los números son aquello que se obtiene por abstracción de todos aquellos sistemas. Sirva en este punto recordar que, si bien las posiciones de Peano y Dedekind son bastante cercanas respecto a la primacía de lo ordinal, discrepan en algunos elementos, principalmente en que para Peano la noción de número es tanto irreducible como intuitiva, siendo así que sus axiomas sólo los caracterizan de manera formal, mientras que Dedekind puede colocarse como uno de los antecedentes del movimiento logicista, ya que su construcción de los números es muy parecida a lo que Russell intentará hacer después cuando busque dar una prueba de la reducción de la aritmética (los axiomas de Peano) a su sistema lógico, es decir, la capacidad de brindar un vocabulario que sirva como traducción sin pérdida de significado entre una teoría y otra.

Ahora bien, para entender la importancia de las progresiones como base de nuestra idea de número, es necesario regresar al inicio del artículo de 1965, específicamente a la distinción que hace entre los diferentes tipos del contar. Así, nos dirá que hay dos usos diferentes del verbo "contar", el transitivo y el intransitivo. El primero se presenta cuando el verbo "contar" admite un objeto directo como, por ejemplo, en "contar las canicas", mientras que en el contar intransitivo no, o en sus palabras "learning these words, and how to repeat them in the right order, is learning intransitive counting. Learning their use as measures of sets is learning transitive counting" (50). Esto le sirve para establecer una jerarquía epistemológica entre los tipos de "contar" ya que, según él, aunque es posible para alguien el aprender a contar de manera intransitiva sin haber aprendido a contar de manera transitiva, el movimiento contrario es imposible toda vez que para poder contar de manera transitiva es necesario haber aprendido un procedimiento recursivo que nos permita generar la notación en orden correcto, tomando en cuenta, claro está, que la misma definición de *contar* es el establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de distintos conjuntos, es decir, para contar los elementos de algún conjunto b con k elementos es necesario establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de algún conjunto b y los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ que sea menor o igual a k. Habiendo presentado lo anterior, Rodríguez Consuegra nos dice sobre el artículo de Benacerraf que "no es más que una presentación ordinalista de los números basada en la idea de que el contar transitivo subyace a nuestra adquisición de ellos, lo que lleva finalmente a negar que los números sean objetos: más bien son posiciones en una progresión o estructura abstracta que caracteriza a la aritmética" (17). En el caso del debate de Ernie y Johnny, Benacerraf contestará que, lo que es el número 3, no es más que el ser precedido por el número 2, el 1, posiblemente el 0 y ser seguido por el número 4, el 5, etc., es decir, cualquier "objeto" puede ocupar el rol que ocupa el número 3, pues cualquier objeto puede ser el tercer elemento de una progresión. Esto funciona a Benacerraf para caracterizar a la aritmética como:

> The science that elaborates the abstract structure that all progressions have in common merely in virtue of being progressions. It is not a science concerned with particular objects - the numbers. *The search for which independently identifiable particular objects the number really are is a misguided one* [...] There is no unique

[34]Incluyendo, ahora sí, el axioma de inducción matemática al conjunto de axiomas originarios.

> set of objects that are the numbers. Number theory is the elaboration of the properties of all structures of the order type of the numbers. The number words do not have single referents. Furthermore, the reason identification of numbers with objects works wholesale but fails utterly object by object is the fact that the theory is elaborating an abstract structure and not the properties of independent individuals, any of which could be characterized without reference to its relations to the rest. (70 - 71)

De este modo, al considerar a los números como sólo lugares en una progresión, Benacerraf está identificando la aritmética en totalidad con la aritmética de Peano, es decir, con el sistema de axiomas de la estructura abstracta que rige todas las progresiones.

Recapitulando, el artículo de 1965 le sirve a Benacerraf para argumentar no sólo contra las posiciones realistas, principalmente la platonista, que sostienen que las matemáticas estudian objetos -números o conjuntos- poniendo como principal argumento el polimorfismo conjuntista, sino también contra las posiciones cardinalistas ya que, empleando el argumento quineano de la reducción ontológica y habiendo caracterizado a las progresiones como la base de la noción de número, Benacerraf no sólo da una solución meramente formal al problema de la ontología en las matemáticas, sino también se situa del lado de los ordinalistas al momento de establecer la primacía del orden como el elemento básico en nuestra concepción del número.

Dada la naturaleza de las afirmaciones de Benacerraf, es obvio suponer que las críticas al artículo de 1965 no se hicieron esperar. A continuación sólo presentaremos la crtíca realizada por Cheng, mientras que del campo platonista, optaremos por la crítica de Wright. Lo que es importante rescatar de la crítica de Cheng es la posibilidad de aceptar el polimorfismo conjuntista sin llegar a la conclusión de Benacerraf, es decir, a la tesis de que dos reducciones conjuntistas del número no pueden ser correctas a la vez. Lo que Cheng nos dice es que ambos sistemas (el de Zermelo y von Neumann por seguir con el ejemplo de Benacerraf) permiten el mutuo entendimiento, en este caso, de la noción de pertenencia, pues la correspondencia entre ellos es lo único necesario para preservar las verdades de la aritmética de una manera relativa a cada sistema, es decir, las dos identificaciones pueden ser correctas al mismo tiempo. En el caso de la noción de pertenencia, Cheng señala que lo importante es interpretarla de manera relativa, es decir, en un sistema 3 pertenece al 17 en el mismo sentido en que $3 \in 17$, mientras que en el otro sucede lo mismo pero en el sentido de $3 \in 4 \in 5 \in 6 \cdots \in 17$. Así Cheng nos dice:

> No es necesario que neguemos la posibilidad de identificar los números con conjuntos; puede decirse que para cada explicación conjuntista de los números naturales, los números naturales son conjuntos. No es necesario que una decisión sobre lo que podrían ser los números en este sentido (débil) entrañe una decisión sobre qué conjuntos particulares deben ser los números. (en Rodríguez Consuegra, 1991: 34)

De este modo una de las consecuencias de asumir la propuesta de Cheng es que las consideraciones de fertilidad son las que deberían decidir este tipo de problemas, muy similar a los argumentos de Gödel y Maddy en la aceptación de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos basándose en justificaciones extrínsecas al sistema, es decir, razones como su fertilidad o la capacidad de hacer más elegante un cálculo.

Wright, por el contrario, situará su crítica en el concepto estructural de progresión, base fundamental de la propuesta de Benacerraf. Así, según Wright, es posible caracterizar el argumento de Benacerraf en las siguientes tres tesis[35]:

1. El concepto de progresión es el básico para la aritmética, o mejor dicho, entender la esencia de la noción de número cardinal finito es entender lo que es una progresión.

2. La idea de progresión es lo básico en nuestra comprensión de los números, los diversos elementos de ella pueden ser conjuntistamente representados de muy distintas maneras, según la progresión particular que adoptemos. Por lo tanto, ninguna de ellas sirve para identificar qué conjuntos son los números ni, en general, se sostiene la tesis de que los números sean objetos: si lo fueran, podrían identificarse los conceptos bajo los que caen.

3. Es correcto implicar de "cualquier progresión de objetos sirve como números naturales" a "las verdades número - teóricas son esencialmente verdades de cualquier progresión", incluso a "es un error suponer que la teoría de números trata de objetos particulares".

Sobre la primera tesis, Wright nos dice que, antes del conocimiento de que los números naturales puedan disponerse en una progresión, lo que es verdaderamente fundamental para poseer alguna noción de número es que entre ellos se identifican y distinguen por referencia a la correlación biunívoca entre conceptos, es decir, es posible poseer la idea de número cardinal finito sin hacer ningún uso de la idea de progresión, destacando las virtudes del cardinalismo sobre el ordinalismo, dado que es más conveniente comenzar la construcción general del número a partir de la idea de cardinalidad, pues ésta facilita la introducción de la distinción finito - infinito. Respecto a la segunda tesis, si bien es cierto que el polimorfismo conjuntista lleva a negar que los números sean objetos, esto sucede sólo por aceptar la tesis quineana de la inescrutabilidad de la referencia, lo que lo volvería aplicable a todos los términos singulares, incluso las mismas clases, o en sus palabras "la conclusión antiplatónica de Benacerraf necesita apelar a una premisa suplementaria tácita: que donde los usos y las explicaciones estándar son insuficientes para determinar unívocamente la supuesta referencia de una expresión aparentemente referencial, la expresión no es verdaderamente referencial" (en Rodríguez Consuegra, 1991: 49). Finalmente sobre la tercera tesis, Wright apelará a la existencia de modelos no isomorfos en la aritmética por lo que no todos los objetos valdrían para una interpretación correspondiente siguiendo los axiomas de Peano. Así, para Wright:

> El que es platónico en materia de números no necesita presuponer que la concepción de los números como objetos es de alguna forma indispensable para nosotros; aún menos que esa concepción es de alguna forma más cercana a la "verdad estructural" acerca de la realidad numérico - teórica que la concepción de las progresiones-en-general. Su posición es, simplemente, que si hay disponible un concepto clasificatorio [*sortal*] del número natural y hay criterios normales que determinen que ese concepto tiene instancias - esto es, que contextos de los tipos

[35]Sigo en este punto el análisis realizado por Rodríguez Consuegra en (1991).

relevantes que contengan términos que pretendan denotar números naturales sean verdaderos - entonces hay tales cosas. (en Rodríguez Consuegra, 1991: 51)

Esto es, los números son objetos en la medida en que hay enunciados verdaderos que contienen numerales, por lo tanto podemos dar cuenta de ellos por un medio u otro. Si bien existen varias críticas al argumento de Benacerraf desde el campo platonista, la mayoría sostiene que, del hecho de que los números no sean objetos se puede implicar que no existe entonces ningún tipo de objetos, lo cual sería, para ellos, absurdo, o que el argumento de Benacerraf no destruye en sí el platonismo de los objetos, sino que lo desplaza a un platonismo de las estructuras.

A pesar del impacto que tuvo su artículo de 1965 fue con "Mathematical Truth" (1973) con el que Benacerraf dejaría de manera definitiva su marca en la historia de la filosofía de las matemáticas, presentando un dilema con el que ataca no sólo a la metafísica sino a la epistemología de las posiciones realistas. A grandes rasgos, el argumento central de Benacerraf se basa en su sugerencia de que dos tipos de preocupaciones diferentes han motivado a las distintas definiciones que tenemos sobre la naturaleza de la verdad matemática, a saber:

1. La preocupación por brindar una teoría semántica homogénea donde la semántica para las proposiciones de las matemáticas sea análoga con aquella del resto del lenguaje.

2. La preocupacón de que nuestra definición de "verdad matemática" se mezcle con una epistemología razonable.

Establecido lo anterior empiezan a mostrarse los dos cuernos del dilema de Benacerraf, uno de carácter metafísico donde se busca satisfacer las demandas de la verdad, y otro de carácter epistemológico donde lo que se busca es satisfacer las demandas del conocimiento. Así, Benacerraf nos dice que una definición satisfactoria de "verdad matemática" es aquella donde se cumplan las siguientes restricciones:

1. Una restricción de tipo semántica sobre la que se nos dice "any theory of mathematical truth [should] be in conformity with a general theory of truth ... which certifies that the property of sentences that the account calls 'truth' is indeed truth". (408)

2. Una restricción de tipo epistemológica sobre la que se nos dice "a satisfactory account of mathematical truth ... must fit into an overall account of knowledge in a way that makes it intelligible how we have the mathematical knowledge that we have. An acceptable semantics for mathematics must fit an acceptable epistemology". (409)

Debemos recordar que, para el momento en que Benacerraf escribe este artículo, la influencia de Tarski[36] y su noción de "verdad" había permeado por completo la filosofía norteamericana de corte analítico, esto nos lo recuerda W. D. Hart (1991) al decirnos:

[36]El mismo Benacerraf más adelante en su artículo nos presenta el ahora famoso *esquema T* de Tarski como "a formally correct definition of the symbol "Tr", formulated in the metalanguage, will be called an adequate definition of truth if it has the following consequences:

1. All sentences which are obtained from the expression '$X \in Tr$ if and only if p' by substituting for the symbol 'X' a structural - descriptive name of any sentence of the language in question and for the

> Tarski showed us how to think of truth as correspondence to fact without having to take seriously a metaphysics of facts, or a correspondence relation between sentences as wholes and chunks of the world, for Tarski showed us how to get away with just sequences of objects and the satisfaction relation [...] Tarski cuts out the property. So while "Socrates" still denotes Socrates, an object satisfies "is wise" if and only if it is wise, and the subject - predicate sentence is true if and only if the denotation of the subject satisfies the predicate [...] Truth is a matter of relations between words and the world. (88 - 89)

La parte del cuerno del dilema metafísico que buscará atacar Benacerraf es la tesis platónica, según la cual existen objetos matemáticos como las funciones, números o conjuntos, que tienen una existencia abstracta, no física y no mental. Dado lo anterior, tenemos que ninguna oración que pertenezca a un cuerpo consistente de oraciones puede ser verdadera a menos que los términos singulares pertenecientes a la oración refieran a objetos, es decir, la verdad requiere referencia a los objetos. Del mismo modo, gracias a la tesis platónica, tenemos que las matemáticas componen un cuerpo de verdades, por lo que podemos inferir que existen objetos, como los números, funciones y conjuntos, denotados por los términos singulares y las variables de las verdades matemáticas, por ejemplo, el teorema de Euclides según el que existen infinitos números primos no es verdadero a menos que existan tales números. Nuevamente Hart nos dice:

> The slogan that truth is correspondence to facts boils down to saying that truth requires reference to objects. It is singular terms that denote, definite descriptions and demostratives usually counted as singular terms, we will also include the variables of quantification; so we are assimilating objects as values of variables to objects as denotata of singular terms more conventionally conceived. (89 - 90)

Lo anterior se vincúla al slogan benacerrafiano de "la referencia es aquello que es, presumiblemente, más cercano a la verdad" (1973: 678), que a su vez, se vincula con su restricción semántica que se vuelve todavía más fuerte al sugerirnos un elemento extra. Consideremos sus ejemplos:

1. Hay al menos tres ciudades más antiguas que Nueva York.

2. Hay al menos tres números perfectos más grandes que 17.

Lo que Benacerraf sostiene que se encuentra al fondo de estos ejemplos es una forma lógico - gramatical del tipo "Hay al menos tres FG's que mantienen una R con a", esto es, suponiendo que los numerales son nombres. Una definición que se adapte a la restrición semántica de Benacerraf debe tratar oraciones del tipo 1 como del tipo 2 bajo la forma lógico - gramatical, situación en la que, al parecer, se encuentran las posiciones realistas y platónicas[37] de las

symbol 'p' the expression which forms the translation of this sentence into the metalanguage.

2. The sentence 'for any x, if $x \in Tr$ then $x \in S$'. In other words '$Tr \subseteq S$'." (677)

[37]Al escribir su artículo, Benacerraf se refiere a esta posición como la estándar dentro de la filosofía de las matemáticas.

matemáticas, que si tratan las oraciones del tipo 2 como instancias de la forma lógico - gramatical antes mencionada, tomando la sintaxis de las oraciones matemáticas por sentado como una guía para sus condiciones de verdad. Pero hacer este vínculo nos mete en un nuevo problema ya que, cualquier teoría que establezca el requisito de ser derivada como un teorema (*theoremhood*) como una condición de verdad, necesita explicar cuál es la conexión entre éste requisito y la verdad. Si bien la postura platónica, usando sus propios postulados, puede resolver sin problema la restricción semántica, tendrá problemas al satisfacer la restricción epistemológica. Es la misma naturaleza del objeto de estudio de las matemáticas lo que parece meternos en este tipo de problemas. Al respecto, Hart nos dice:

> Mathematics, like most sciences, has a subject matter, and that subject matter of mathematics is the infinite, either because, like number theory, it treats of object of which there are infinitely many (and so needs proof instead of examination of all cases), or else because, like analysis, it treats of infinitely many infinite objects (like real numbers), or else because, like set theory, its *raison d'être* is a theory of infinity per se. The infinitary character of the subject matter of mathematics is a high hurdle for all attempts to render that matter material. (91 - 92)

Para Hart, el problema no sólo es el compromiso ontológico que tienen las posturas realistas con los objetos matemáticos sino que, desde Hume, nuestra noción de causalidad ha sido el "cemento de nuestro universo" (102) y los objetos matemáticos al ser abstractos y, por lo tanto, causalmente inertes, no se relacionan de ninguna manera con nuestra actual visión naturalista, por lo que Hart sostiene que, todo aquel convencido de la tesis metafísica platonista debe negar que nuestra cosmología convencional sea "la historia completa" (102). Pasar la restricción epistemológica se vuelve ahora necesario para poder salvar una visión platonista de la ontología de las matemáticas. Para Benacerraf, una definición que da cuenta de manera satisfactoria de la epistemología es aquella que requiere que, si para algún sujeto X que conoce que p, debe existir una conexión causal adecuada entre las condiciones de verdad de p, por un lado, y las razones para que X crea que p, por el otro. Dada la causalidad inerte que los objetos matemáticos abstractos tienen con el mundo, es aparente que la restricción epistemológica será mucho más complicada de sortear. Ya que la verdad requiere referencia a los objetos, el conocimiento de la verdad es mejor entendido en términos de transacción o conexión[38] entre el que conoce la verdad y los objetos requeridos para la verdad, lo que justifica la creencia que el que conoce tiene acerca de ellos. Esto sería el cuerno epistemológico del dilema de Benacerraf:

> We have mathematical knowledge and such knowledge is no less knowledge for being mathematical. Since our knowledge is of truths, or can be so construed, as account of mathematical truth, to be acceptable, must be consistent with the possibility of having mathematical knowledge: the conditions of the truth of mathematical propositions cannot make it impossible for us to know that they are satisfied. [...] The minimal requirement, then, is that a satisfactory account of mathematical truth must be consistent with the possibility that some such

[38]En su artículo, Hart menciona el término "commerce" y lo entiende como el modo básico en el que las personas justifican una creencia como verdadera, es decir, a través de la percepción.

> truths be knowable. To put it more strongly, the concept of mathematical truth, as explicated, must fit into an overall account of knowledge in a way that makes it intelligible how we have the mathematical knowledge that we have. An acceptable semantics for mathematics must fit an acceptable epistemology. (677)

Lo que necesita introducir ahora es la noción de causalidad con la que va a trabajar, esto con el fin de hacer más fuerte su argumento y obligar con ello a aceptar la conclusión del cuerno epistemológico. Así, sobre la noción de causalidad, escribe:

> I favor a causal account of knowledge on which for X to know that S is true requires some causal relation to obtain between X and the referents of the names, predicates, and quantifiers of S. I believe in addition in a causal theory of reference, thus making the link to my saying knowingly that S doubly causal [...] In conjunction with our other knowledge, we use p to determine the range of possible relevant evidence. We use what we know of X (the putative knower) to determine whether there could have been an appropriate kind of interaction, whether X's current belief that p is causally related in a suitable way with what is the case because p is true - whether his evidence is drawn from the range determined by p. The connection between what must be the case if p is true and the causes of X's belief can vary widely. But there is always some connection, and the connection relates the grounds of X's belief to the subject matter of p. ***Combining this view of knowledge with the platonic view of mathematical truth makes it difficult to see how mathematical knowledge is possible.*** (671 - 672)

El dilema de Benacerraf queda entonces establecido: dado nuestro marco teoríco metafísico (el platonismo o postura estándar), lo que es necesario para la verdad matemática es lo que vuelve al conocimiento matemático imposible y, a pesar de eso, podemos decir que tenemos conocimiento matemático. Lo que nos falta, dirá Benacerraf, es mostrar el vínculo que existe entre "prueba" y "verdad" cuando nuestro referente para "verdad" se encuentra en el universo platónico, es decir, cuando la definición de verdad está definida a la manera del platonista. La demanda de Benacerraf para el platonista es justo mostrar este vínculo entre nuestras capacidades cognitivas y los objetos que conocemos, así es cuando nos dice "we accept as knowledge only those beliefs which we can appropriately relate to our cognitive faculties. Quite appropriately, our conception of knowledge goes hand in hand with our conception of ourselves as knowers" (674). Dado lo anterior sólo nos queda o mantener nuestra postura platonista para sostener el cuerno metafísico del dilema y modificar nuestra epistemología o mantener el empirismo necesario por el cuerno epistemológico y modificar nuestra metafísica. Sea cual sea el camino que tomemos lo cierto es que el planteamiento de Benacerraf nos impide sostener un platonismo clásico como garante de tanto nuestra epistemología como de nuestra metafísica.

A pesar de que ahora conocemos a este problema como el "dilema de Benacerraf", no le era ajeno a diversos platonistas. Al igual que Gödel, Frege y Russell tomaron partido antes siquiera que Benacerraf formulara su famoso dilema, optando los tres, en los términos de éste último, por modificar su epistemología para mantener su metafísica intacta. Así Frege nos dice que podemos aprehender lo abstracto, Russell que tenemos conocimiento de los universales y Gödel que tenemos algo así como la percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, todos dando argumentos bastante oscuros para justificar su postura epistemológica, lo que nos recuerda Hart cuando nos dice "each is strikingly taciturn about the epistemic faculty he claims, but it seem plausible that each is cutting his epistemological coat to suit his metaphysical cloth" (99).

A partir de este punto Benacerraf presentará su solución para sortear el dilema. Teniendo como antecedente el artículo de 1965, es de esperarse la posición que tomará en la llamada "visión combinatoria" de la verdad matemática:

> The "combinatorial" view of mathematical truth has epistemological roots. It starts from the proposition that, whatever may be the "objects" of mathematics, our knowledge is obtained from proofs. Proofs are or can be (for some, must be) written down or spoken; mathematicians can survey them and come to agree that they are proofs. It is largely through these proofs that mathematical knowledge is obtained and transmited. In short, this aspect of mathematical knowledge - its (essentially linguistic) means of production and transmission gives their impetus to the class of views that I call "combinatorial". (675)

Usando el léxico contemporáneo en filosofía de las matemáticas, diríamos que las posturas que Benacerraf llama "combinatorias" son, o bien equivalentes o pertenecen a la familia de las posturas formalistas, donde las matemáticas son sólo un juego de reglas, símbolos escritos en papel donde se postulan axiomas y se derivan teoremas; un nominalismo de las matemáticas donde, como conclusión extrema de una de las formas de escapar el dilema de Benacerraf, la ontología queda subsumida a la epistemología. Para un "combinatorialista" las matemáticas son nuestra creación, a diferencia del realista que mantendrá que las matemáticas son descubiertas por nosotros, pertenecientes a una realidad independiente. Habiendo establecido nuestra ontología como dependiente de nuestra epistemología, un "combinatorialista" sólo necesita de una noción de verdad matemática que de cuenta del modo en que estos símbolos se relacionan entre sí, de la congruencia que hay entre los términos, por lo que no es raro que optaran por el críterio de la convención T de Tarski como una definición satisfactoria de verdad para un lenguaje particular. Si seguimos a Tarski, una mera distribución recursiva de los valores de verdad puede ser presentada como una teoría de la verdad que satisfaga la convención T. Al respecto, nos dice:

> Truth and reference go hand in hand. Our concept of truth, insofar as we have one, proceeds through the mediation of the concepts Tarski has used to define it for the class of languages he has considered - the essence of Tarski's contribution goes much further than Convention T, but includes the schemata for the actual definition as well: an analysis of truth for a language that did not proceed through the familiar devices of predication, quantification, etc., should not give us satisfaction. (678)

Como "combinatorialista", Benacerraf ha optado por una versión "naturalizada" de la verdad para reforzar su epistemología, siendo gracias a la motivación epistemológica que corre por debajo del proyecto "combinatorialista" que se nos presentan condiciones de verdad cuya satisfacción o no satisfacción simples mortales pueden comprobar (678). Aún así, Benacerraf reconoce los problemas que enfrenta una postura como la que está defendiendo, ya que al establecer la ecuación "convención garantiza verdad", se vuelven incapaces de establecer una conexión entre los valores de verdad y la verdad de las proposiciones de las que éstos son valores. Finalmente debemos recordar que justo lo que el dilema de Benacerraf nos muestra es la aparente antinomia que existe en la confluencia entre metafísica y epistemología, por lo que, si bien posturas como la de Benacerraf mantienen una epistemología robusta, su ontología, al menos en el campo de los objetos matemáticos, se vuelve nula lo que los hace enfrentarse a diversos problemas como la efectividad que tienen las matemáticas en fenómenos empíricamente verificables, eso a lo que Eugene Wigner llamó "the unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences". Hart nos recuerda lo que estamos perdiendo si aceptamos la solución de Benacerraf cuando escribe que:

> The objectivity of a truth is its being true independently of whether we say, think or believe it true, and answering to objects that are as they are independently of how we say, think or believe them to be seems the only way truth is objective [...] In Benacerraf's dilemma and its analogues, the second horn is epistemological. There the point is always that empiricism, which counts perception as the basic mode of justification, is our favoured epistemology, that perception is a causal process, and yet that the objects required by the metaphysical horn, seem utterly inert. While these are epistemological points, they have their metaphysical dimensions. For the epistemological difficulty is also a failure to fit knowing minds and known objects together in a universe of which the cement is causation [...] Could it be the conventional cosmology that is at the root of these problems? (100 - 102)

Al igual que antes las respuestas a Benacerraf no se hicieron esperar, algunas de ellas llegando a conclusiones verdaderamente extremas con tal de salvaguardar la metafísica platonista. Balaguer (2008) nos presenta algunas de las objeciones más importantes, parafraseando primero el dilema como:

1. Los humanos existimos dentro del espacio-tiempo.
2. Si existen los objetos matemáticos abstractos, existen fuera del espacio-tiempo.
3. Si existen los objetos matemáticos abstractos, los humanos no podríamos tener conocimiento de ellos.
4. Si el platonismo matemático es correcto, los humanos no podríamos tener conocimiento matemático.
5. Los humanos tenemos conocimiento matemático.
6. Por lo tanto, el platonismo matemático no es correcto.

Una vez así establecido, Maddy responde al dilema diciendo que los humanos podemos adquirir información acerca de los objetos matemáticos a través de la percepción ordinaria. Manteniendo la epistemología empirista preferida por Benacerraf, Maddy cree solucionarlo al establecer que los conjuntos de objetos físicos pueden ser tomados como existentes dentro del espacio-tiempo y, por lo tanto, podemos percibirlos. Ahora bien, ya que todos estos conjuntos mantienen la misma base física, es decir, comparten lugar y materia, Maddy se enfrenta al problema de cómo poder diferenciar unos de otros por lo que parece sugerir que esta diferencia es posible por medio de algún elemento no-físico y, por lo tanto, parece que el aristotelismo epistemológico de Maddy, que le sirve para mantener su platonismo metafísico, vuelve a caer en el dilema de Benacerraf.

A su diferencia, Resnik y Shapiro, a través de su estructuralismo platonista, mantienen que nuestras teorías matemáticas nos proveen de descripciones verdaderas acerca de las estructuras matemáticas abstractas, esto gracias a que los seres humanos podemos adquirir conocimiento acerca de las estructuras matemáticas sólo mediante la construcción de sistemas axiomáticos, es decir, los sistemas axiomáticos nos brindan de manera implícita las definiciones de las estructuras. Su problema surge al momento en que no nos explican cómo es que los seres humanos podemos conocer cuál de los varios sistemas axiomáticos que podemos construir y formular es el verdadero, es decir, cuál es el que aprehende de manera correcta a las estructuras matemáticas reales que existen en el plano matemático. Quine, por su parte, defendiendo la tesis del compromiso ontológico, nos dice que, si partimos del hecho de que nuestras teorías matemáticas se encuentran insertas en nuestras teorías empíricas y que éstas han sido confirmadas a través de evidencia[39], a pesar de que no tenemos contacto con los objetos matemáticos podemos tener evidencia empírica para creer que nuestras teorás matemáticas son verdaderas y, por lo tanto, creer que éstos objetos existen.

Ahora bien, dado que los objetos abstractos no entran en relaciones causales con nada en el mundo físico, se sigue que los humanos deberíamos recibir la misma información perceptual existan o no estos objetos a los que llamamos matemáticos, por lo que la postura de Quine tiene, al menos, dos graves problemas. El primero es que los datos empíricos pueden darnos razón para creer solamente en que existen hechos puramente físicos necesarios para la verdad de la ciencia empírica. Estos datos no nos dan buenas razones para creer que nuestras teorías empíricas son, literalmente, verdaderas. Por otro lado, Quine no nos explica el hecho de que los matemáticos puedan obtener conocimiento de sus teorías antes de que éstas sean aplicadas en la ciencia empírica.

Pero es sin lugar a dudas la postura de Balaguer, Linsky y Zalta la que llevará el platonismo hasta sus últimas consecuencias. Como vimos anteriormente, el “platonismo pleno” de Balaguer y compañía sostiene que todos los objetos matemáticos posibles existen, es decir, todos los objetos matemáticos que podrían existir, existen en verdad. Hemos ahora pasado de la existencia de ciertos objetos matemáticos como funciones, conjuntos, números, etc., a la existencia de todos los objetos matemáticos posibles. Balaguer mantiene esta posición debido a que todas las teorías puramente matemáticas consistentes describen de manera precisa una colección de objetos matemáticos abstractos, y para obtener el conocimiento de éstos, lo único que necesitamos es adquirir el conocimiento de una teoría puramente matemática que sea consistente. Conocer la consistencia de una teoría no requiere ningún tipo de contacto con los objetos de los que trata esa teoría, así como ningún tipo de acceso al plano donde se encuentren, por lo que podemos obtener conocimiento acerca de los objetos matemáticos

[39]Aquí se nos dice que, cuando una teoría empírica es confirmada a través de evidencia empírica, la totalidad de la teoría es confirmada, como vimos anteriormente.

abstractos sin la ayuda de algún tipo de intercambio de información entre nosotros y tales objetos. Quizá el problema más grave que enfrenta una postura como el platonismo pleno es que parece ser inconsistente con la pretención de objetividad en las matemáticas, ya que, por ejemplo, la hipótesis del continuo no tendría un valor de verdad determinado pues su afirmación como su negación serían descripciones correctas de zonas del mapa de las matemáticas.

Aunque ya fue mencionado previamente, Gödel tiene también una propuesta para sortear problemas similares al dilema de Benacerraf, pero dedicaremos todo el tercer apartado de este capítulo para analizarla a fondo.

2: Interludio técnico
El universo constructible L y los teoremas de incompletud[40]

Pero, ¿sobre qué hablamos cuando decimos "los teoremas de incompletud de Gödel" o "L es el modelo más pequeño de ZFC"? En el presente capítulo nos dedicaremos a presentar, de manera técnica, los resultados de Gödel antes mencionados para, en el capítulo siguiente, realizar un análisis filosófico con miras a establecer la hipótesis de trabajo de la presente investigación, a saber, una lectura platonista del resultado de consistencia de CH con los axiomas de ZF utilizando los teoremas de incompletud como herramienta filosófica o, en otras palabras, que la prueba de consistencia de ZF + CH así como el uso de los modelos internos, específicamente L, responde a una motivación metafísica por parte de Gödel presente ya en su justificación y en su posterior revalorización de los teoremas de incompletud.

Antes de presentar el universo constructible L es importante tener en claro qué vamos a entender por "modelo". Siguiendo a Bagaria (2013) un modelo de ZFC es un par $\langle M, E\rangle$, donde M es un conjunto no vacío o una clase propia y E es una relación binaria en M tal que $\langle M, E\rangle$ satisfacen los axiomas de ZFC. Ahora bien, un modelo $\langle M, E\rangle$ es llamado *standard* si E es $\in$, es decir, E es interpretado como la relación binaria de pertenencia entre conjuntos. De manera formal $E = \in \cap (M \times M)$. Usualmente escribimos $\in$ en lugar de E cuando $\langle M, E\rangle$ es estándar.

Sírvanos por ahora recordar la distinción entre "clase propia" y "conjunto", siendo la primera una colección que puede ser *definida*, es decir, que podemos describir mediante una fórmula simple sobre una variable libre, o como todos los conjuntos que tienen una propiedad que puede ser descrita en un lenguaje determinado; mientras que el segundo responde a los elementos de un modelo de la teoría de conjuntos. En otras palabras, los conjuntos son elementos de otros conjuntos, mientras que las clases no son elementos de otras clases (si $A \in B$ entonces A es un conjunto). De igual manera, debemos tener presente los siguientes conceptos:

Def. Ordinales: *si α es un ordinal, entonces α es el conjunto de todos los ordinales β tal que β*

[40] Si bien le debemos a Gödel los resultados que presentaremos a continuación, específicamente aquellos de 1931 y 1938, nos alejaremos de su notación a favor de una versión más actualizada de los mismos, siendo esenciales para la primera parte los textos de Jech (2003), Kunnen (2013) y Bagaria (2013), mientras que, para la segunda parte, utilizaremos los textos de Nagel y Newman (2008), Berto (2009) y Smith (2007 y 2014). Para un tratamiento más técnico de los teoremas de Gödel, se remite al clásico texto de Boolos, Burgess y Jeffrey (2007) y a Smullyan (1992).

es menor que α, es decir, si α es un ordinal, entonces $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ es el siguiente ordinal más grande.

Inducción transfinita[41]: *Sea C una clase de ordinales. Asumamos que:*

1. $0 \in C$
2. Si $\alpha \in C$, *entonces* $\alpha + 1 \in C$
3. Si α *es un ordinal límite que no es cero y* $\beta \in C$ *para toda* $\beta < \alpha$, *entonces* $\alpha \in C$.
Por lo tanto, C es la clase de todos los ordinales.

Lo anterior nos sirve para poder definir la *jerarquía acumulativa de conjuntos* o el *universo de von Neumann V* por inducción transfinita como:

$V_0 = \emptyset$,
$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$,
$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ si α es un ordinal límite.

De igual modo, algunas de las propiedades de V_α son:

(i) Cada V_α es transitiva.
(ii) Si $\alpha < \beta$ entonces $V_\alpha \subset V_\beta$.
(iii) $\alpha \subset V_\alpha$.

Por el axioma de regularidad, tenemos entonces que cualquier conjunto se encuentra en un V_α. Así mismo, ω denota el ordinal infinito más pequeño, es decir, el conjunto de todos los ordinales finitos, por lo tanto, V_ω es infinito y es el conjunto de todos los conjuntos (hereditarios) finitos.

2.1: El modelo L y el axioma de constructibilidad $V = L$

Siguiendo a Gutiérrez (2015) caracterizaremos a los conjuntos definibles de la siguiente manera:

Def. Conjuntos definibles *Sea X un subconjunto de M. Decimos que X es definible sobre la estructura* $\langle M, E\rangle$ *sii existe una fórmula* ϕ *del lenguaje de la teoría de conjuntos con* $n+1$ *variables libres y existen* $a_1, \ldots, a_n$ *elementos del conjunto M tales que* $X = \{x \in M | \langle M, E\rangle \models \phi[x, a_1, \ldots, a_n]\}$.

Si consideramos

def(*M*) $= \{X \subset M : X$ es definible en $\langle M, \in\rangle\}$.

[41]Corresponde al teorema 2.14 de Jech (2003).

Tenemos que $M \in$ def(M) y $M \subset$ def(M) $\subset \wp(M)$.

Pero, ¿qué significa que los conjuntos sean definibles? Devlin nos dice al respecto:

> we shall construct our new hierarchy almost as if we were actually carrying out the construction step by step, at each stage having only those sets available which we have constructed so far, and introducing new sets only when we can construct them using properties expressible in (the formal language of set theory). (en Maddy, 1993: 38)

Partiendo de lo anterior, el universo constructible L es definido por recursión sobre los ordinales como:

(i) $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$,
donde
(ii) $L_0 = \emptyset$
(iii) $L_{\alpha+1} =$ def(L_α)
(iv) $L_\delta = \bigcup\limits_{\alpha<\delta} L_\alpha$ para un ordinal límite $\delta > 0$.

Algunas de las propiedades básicas de L son:

(i) Para toda $\alpha \leq \beta$, $L_\alpha \subseteq L_\beta$.
(ii) Para toda α, L_α es transitiva. Por lo tanto, L es transitiva.
(iii) Para toda α, $L_\alpha \subseteq V_\alpha$. Si $\alpha \leq \omega$, entonces $L_\alpha = V_\alpha$. De igual modo, si α es infinita, $|L_\alpha| = |\alpha|$.
(iv) Cuando $\alpha < \beta$, entonces α, $L_\alpha \in L_\beta$.
(v) Para toda α, $L \cap \alpha = L_\alpha \cap$ ORD $= \alpha$. En particular, L contiene a todos los ordinales.

Contraria a la definición de V por recursión sobre los ordinales donde pasamos de un V_α a un $V_{\alpha+1}$ al tomar el conjunto potencia ($\wp$) de V_α, en el universo constructible L, en lugar de tomar los niveles $V_{\alpha+1}$ bajo la operación de conjunto potencia ($\wp$), tomaremos sólo aquellos conjuntos cuyos subconjuntos de V_α que sean definibles dentro de V_α, permitiéndonos usar los elementos de V_α como parámetros en las definiciones, esto es, la principal diferencia entre el universo constructible y la jerarquía acumulativa de conjuntos es que en el primero cada conjunto está determinado por una condición formal, introduciendo un elemento constructivista al momento de definir qué condiciones son las que serán permitidas en este nuevo universo, o en palabras de Maddy (1993):

> At a particular stage α, given a particular formula Φ, we are allowed as parameters only elements of L_α, that is, previous existing sets, and the quantifiers over Φ are understood as ranging, not over al sets, but again over L_α, the previously existing sets. In other words, new sets are defined predicatively; impredicative definitions are disallowed. (38)

Al igual que *V*, *L* es una jerarquía acumulativa en la que cada conjunto se va construyendo a partir de los estratos previamente definidos, esto es, $\langle L_\alpha : \alpha \in \text{ORD} \rangle$ y, de manera particular, cada L_α es transtivo, $L_\alpha \subset L_\beta$ si $\alpha < \beta$ y *L* es una clase transitiva. El problema al que nos enfrentamos ahora es que para poder probar que *L* puede mostrar que todos sus elementos son constructibles, es decir, que "x es constructible" es absoluto para *L*, necesitamos de un axioma, el llamado ***axioma de constructibilidad*** donde $V = L$, es decir, $\forall x(x \in L)$. Nuevamente Maddy nos dice al respecto que:

> The comparison between this hierarchy and the standard one is simple: a given stage of the standard hierarchy includes every combinatorially determined set of existing elements; the same stage of the constructible hierarchy includes only those sets of existing elements that are definable in a certain way. Still this contrast alone does not rule out the possibility that every combinatorially determined set turns up eventually, at some stage of the constructible hierarchy. (1993: 38)

Pasemos entonces a mostrar que *L* satisface los axiomas de ZF o, lo que es igual, que *L* es un modelo de ZF, $L \models ZF$[42].

(i) ***Extensionalidad***: *L* es transitivo y, por lo tanto, extensional.

(ii) ***Par***: Si $x, y \in L_\alpha$, entonces $\{x, y\} \in L_{\alpha+1}$.

(iii) ***Separación***: Sea ϕ una formula. Dado $X, p \in L$, nos interesa mostrar que el conjunto $Y = \{u \in X : \phi^L(u,p)\}$ está en *L*. Por el ***principio de reflexión***[43] existe una α tal que $X, p \in L_\alpha$ y $Y = \{u \in X : \phi^{L_\alpha}(u,p)\}$. Por lo tanto, $Y = \{u \in L_\alpha : L_\alpha \models u \in X \wedge \phi(u,p)\}$ y $Y \in L$.

(iv) ***Unión***: Si $x \in L_\alpha$, entonces $\cup x \in L_{\alpha+1}$.

(v) ***Conjunto potencia***: Supongamos que $x \in L$. Sea β un ordinal lo suficientemente grande de modo que $\wp(x) \cap L \subseteq L_\beta$. Entonces, $\wp(x)^L = \wp(x) \cap L \in L_{\beta+1}$.

(vi) ***Infinito***: Obvio por $\omega \in L$.

(vii) ***Regularidad***: *L* es transitivo y, por lo tanto, satisface el axioma de regularidad.

(viii) ***Reemplazo***: Si una clase *F* es una función el *L*, entonces para cualquier $X \in L$ existe un α tal que $\{F(x) : x \in X\} \subset L_\alpha$. Ya que $L_\alpha \in L$ es suficiente para satisfacer el axioma.

---

[42]Lo siguiente corresponde a los teoremas 13.3 de Jech (2003), II.6.11 de Kunnen (2013) y 0.19 de Bagaria (2013).

[43]El principio de reflexión nos dice que, para cualquier número finito de fórmulas, existe un conjunto ***M*** que es un ***submodelo elemental*** del universo respecto a las fórmulas dadas, siendo que:
(i) Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula. Para cualquier M_0 existe un conjunto $M \supset M_0$ tal que $\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n)$, para cualquier $x_1, \ldots, x_n \in M$. Se dice entonces que ***M refleja a*** ϕ.
(ii) Existe un $M \supset M_0$ transitivo que refleja ϕ y existe un ordinal límite α tal que $M_0 \subset V_\alpha$ y V_α refleja ϕ.
(iii) Asumiendo el axioma de elección, existe un $M \supset M_0$ tal que ***M*** refleja ϕ y $\mid M \mid \leq \mid M_0 \mid \cdot \aleph_0$. De manera particular, existe un ***M*** contable que refleja ϕ.

Como habíamos mencionado anteriormente, el llamado *axioma de constructibilidad* o $V = L$ responde a la formula $\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$, esto es, todo conjunto es constructible y pertenece a *L*. Podemos demostrar lo anterior recordando que $L \models \theta$, donde θ es la conjunción de una cantidad finita de axiomas necesarios para construir *L*. Una consecuencia inmediata de $L \models ZF$ es que $L^L = L$ y, por lo tanto, $L \models V = L$.[44] Se le conoce como *modelos internos* de ZF a las clases transitivas que contienen a todos los ordinales y satisfacen los axiomas de ZF. Siendo éste el caso del universo constructible *L*, *L* es el modelo interno más pequeño de ZF y es gracias al trabajo de Gödel de 1938 que, actualmente, el programa de modelos internos liderado por Hugh Woodin es uno de los caminos más prometedores para encontrar, si bien no una posible solución a CH, sí el descubrimiento de nuevos lugares del universo conjuntista no explorados.

Ahora bien, lo que nos resta en este punto, y haciendo uso de las herramientas que hemos ido recolectando, es mostrar la consistencia de CH con el axioma de constructibilidad. Esta prueba se la debemos nuevamente a Gödel (1938) y nos dice que[45] $L \models GCH$.

Sea** ω_α **un cardinal infinito y sea X un subconjunto constructible de** ω_α**. Se demuestra que existe un** $\lambda < \omega_{\alpha+1}$ **tal que** $X \in L_\lambda$**, de tal modo que** $\wp(\omega_\alpha)^L \subseteq L_{\omega_{\alpha+1}}$**. Ya que** $\mid L_{\omega_{\alpha+1}} \mid = \aleph_{\alpha+1}$**, tenemos que** $\mid \wp(\omega_\alpha)^L \mid \leq \aleph_{\alpha+1}$**. Pero** $\mid \wp(\omega_\alpha)^L \mid > \aleph_\alpha$**, tenemos que** $\mid \wp(\omega_\alpha)^L \mid = \aleph_{\alpha+1}$ **para todo** α **número ordinal. Por lo tanto, GCH vale en L.[46]

2.2: Los teoremas de incompletud de Gödel

Mucho se ha escrito sobre los teoremas de incompletud de Gödel: que si es el posmodernismo infectando las matemáticas o que si demuestran que el cerebro no es una máquina de Turing y que la tesis de la *Inteligencia artificial fuerte* está condenada al fracaso[47], pero los teoremas, formalmente, distan mucho de tales interpretaciones. A continuación presentaremos el primer teorema de incompletud para, en un segundo momento, presentar su corolario, el llamado segundo teorema de Gödel.

2.2.1: El primer teorema de incompletud

Siguiendo a Berto (2009) podemos enunciar el primer teorema de dos maneras: una en el lenguaje cotidiano y otra en un lenguaje más técnico.[48] La formulación en el lenguaje cotidiano es, quizá, la más conocida y nos dice que *si un sistema formal S de la aritmética es consistente, podemos entonces construir una proposición, llamémosle G, que es verdadera pero no demostrable dentro de ese sistema, por lo que si S es consistente G es tanto verdadera como no demostrable.* En un lenguaje más técnico tenemos que *sea* $\mathbf{T}$ *una teoría formal que contiene a la*

[44] Corresponde a los teoremas 13.16 de Jech (2003) y es una consecuencia del teorema 0.19 de Bagaria (2013).

[45] Correspondiente a los teoremas 13.20 de Jech (2003), 1.5 de Bagaria (2013) y 5 de Gutiérrez (2015).

[46] La prueba de existencia de λ necesita del llamado *lema de condensación*, que puede revisarse en Jech (2003) bajo el lema 13.17.

[47] Para más sobre estas lecturas, pueden revisarse los textos de Franzén (2005) y Berto (2009).

[48] Siendo totalmente técnicos, el resultado presente en el teorema VI de (1931) nos dice que:
Para cada clase recursiva ω*-consistente* κ *de* FÓRMULAS *existen* SÍMBOLOS DE CLASE *recursivos r, tales que ni* υ Gen *r ni* Neg(υ Gen *r*) *pertenecen a* Flg(κ) (*donde* υ *es la* VARIABLE LIBRE *de r*).

aritmética. Existe entonces una proposición ϕ que enuncia su propia no demostrabilidad tal que si $\mathbf{T}$ *es consistente, entonces* $\mathbf{T} \nvdash \phi$ *y, si* $\mathbf{T}$ *es* ω*-consistente, entonces* $\mathbf{T} \nvdash \neg\phi$.

La estrategia empleada por Gödel para llevar esto acabo es por sí sola sorprendente al colapsar en una misma proposición el aspecto metamatemático con el aritmético, es decir, al encontrar una manera en que elementos aritméticos "hablaran" de su propio formalismo, una proposición autorreferente que enuncia tanto un hecho aritmético como su propia no demostrabilidad, probando con esto que existen proposiciones aritméticas verdaderas que no pueden ser demostradas. Para ello "codificará" proposiciones metamatemáticas con números, lo que le permitirá utilizarlas como si de meros números se tratasen. De lo anterior se deriva que un sistema formal es o inconsistente o incompleto, o en palabras de Garrido:

> Gödel abrió una brecha entre sintaxis y semántica, entre lo deducible y lo verdadero, puesto que su fórmula *G*, que es indecidible - y por tanto, indeducible -, resulta sr, sin embargo, verdadera cuando se le interpreta material o contentualmente, si se me permite el uso de esta palabra, que suena a barbarismo, para significar con un sólo vocablo la expresión «por razón de su contenido». En el sistema formal de la lógica elemental, todo lo deducible es verdadero y todo lo verdadero es deducible. Pero el teorema de incompletud de Gödel establece que en el sistema formal de la aritmética elemental, si bien (de acuerdo con la hipótesis de consistencia del sistema) todo lo deducible es verdadero, no todo lo verdadero es, sin embargo, deducible, como lo evidencia el cason de la proposición indecidible *G*. (1993: 52-53)

Esto debido a que esperamos que todo teorema (T) que sea deducible en nuestro sistema formal debe ser interpretado como una proposición lógicamente verdadera (V), esto es, $T \rightarrow V$. De la misma manera, toda proposición lógicamente verdadera (V) puede ser deducida formalmente como un teorema (T) de nuestro sistema, $V \rightarrow T$. De lo anterior, podemos lógicamente establecer que de la conjunción de $T \rightarrow V$ y $V \rightarrow T$, $T \leftrightarrow V$, esto es:

> Semejante equivalencia quiere decir que, en el ámbito de la lógica elemental hay una correspondencia absoluta y recíproca entre los teoremas del sistema y las verdades de la lógica, entre la propiedad sintáctica de «deducible» y la propiedad semántica de «verdadero», entre «deducibilidad» y «verdad», entre sintaxis y semántica. (Garrido, 1993: 51)

La estrategia de Gödel parte de establecer un sistema formal específico que se conforma de los siguientes elementos[49]:

1. Un alfabeto de símbolos.

2. Reglas para combinar estos símbolos en fórmulas bien formadas.

3. Un conjunto específico de fórmulas bien formadas que servirán como axiomas.

[49]Seguimos para esta lista a Goldstein (2005), Berto (2009) y Nagel y Newman (2008).

4. Un aparato deductivo para derivar, a través de consecuencias lógicas, fórmulas bien formadas de otras fórmulas bien formadas que pueden ser o axiomas o consecuencias de éstos (teoremas).

5. 9 conceptos primitivos con sus correspondientes signos con los cuales se pueda expresar toda la aritmética en un sistema formal.

Estos conceptos primitivos son:

$\neg$ correspondiente al número de Gödel 1 y significa “no”.
$\rightarrow$ correspondiente al número de Gödel 2 y significa “si... entonces...”.
$\times$ correspondiente al número de Gödel 3 y significa “variable”.
$=$ correspondiente al número de Gödel 4 y significa “igual”.
0 correspondiente al número de Gödel 5 y significa “cero”.
S correspondiente al número de Gödel 6 y significa “el sucesor de...”.
(correspondiente al número de Gödel 7 y significa “signo de puntuación”.
) correspondiente al número de Gödel 8 y significa “signo de puntuación”.
’ correspondiente al número de Gödel 9 y significa “prima”.

Veamos lo anterior con un ejemplo. Para la fórmula (p1) $(x)(x')((S(x) = S(x')) \rightarrow (x = x'))$ el número de Gödel que le correspondería, siguiendo la traducción de los conceptos primitivos, sería GN(p1) $=$ 738739877673846739882734398. Si a la fórmula anterior le agregamos la fórmula (p2) $S(0) = S(0)$, tendremos como resultado el número de Gödel GN(p1,p2) $=$ 7387398776738467398827343980675846758. De tal modo que, todas las relaciones lógicas que existen entre proposiciones de nuestro sistema formal se transforman ahora en relaciones aritméticas expresables en el lenguaje aritmético que posee el sistema mismo. Lo que resta ahora es mostrar cómo si una fórmula bien formada 1 implica una fórmula bien formada 2, tal relación se mantendrá en sus respectivas representaciones con números de Gödel, es decir, si GN(1) puede expresarse como un factor de GN (2).

Siguiendo a Goldstein (2005), tenemos que existen dos maneras posibles de llevar esto acabo, a saber, podemos utilizar reglas de inferencia para deducir la fórmula bien formada 2 de la fórmula bien formada 1, o podemos mostrar que GN(1) puede obternerse a partir de GN(2) al realizar la operación de multiplicación por un entero. Así, si GN(1) = 195589 y GN(2) = 317, tenemos que el segundo, 317, es un factor de 195589, ya que 317 multiplicado por 617 nos da 195589. De esta manera se muestra cómo nuestra fórmula bien formada 1 implica lógicamente la fórmula bien formada 2 ya sea utilizando reglas formales para deducir la fórmula bien formada 2 de la fórmula bien formada 1, o utilizando reglas de la aritmética para llegar a que GN(1) es igual a 195589 al multiplicar 617 por 317, éste último siendo GN(2).

Es a partir de este colapso entre el lenguaje del sistema y el lenguaje que habla sobre el mismo, que Gödel se propone demostrar que ciertas secuencias de fórmulas bien formadas poseen una propiedad aritmética expresable dentro del sistema, y ésta es la de ser demostrable. Es en este momento en el que se introduce el llamado *lema en diagonal* que nos dice, *grosso modo*, que el número de Gödel es tal que para cada función proposicional *F(x)* de una variable, existe un número *n* tal que el número de Gödel de *F(n)* es *n* misma, es decir, para cualquier

F(x) existe una *n* tan que *n* = GN(*F(n)*).[50]

Partamos entonces de una propiedad Pr la cual es verdadera para todos y cada uno de los números de Gödel de los teoremas del sistema, así, un número tendrá la propiedad aritmética Pr sí y sólo sí es demostrable según su número de Gödel, esto es, Pr(GN(*p*)) sí y sólo sí *p* es demostrable. La segunda propiedad que será ahora introducida es ¬Pr(*x*), la cuál será verdadera para todos los números de Gödel que no sean teoremas, es decir, es verdadera para todos los números de Gödel de objetos que no son proposiciones demostrables dentro del sistema. Ahora bien, ¬Pr(GN(*p*)) es una proposición metamatemática. Con esto queremos decir que ella misma no es una proposición del sistema formal o una proposición aritmética, pero nos servirá para transformar algunas proposiciones metamatemáticas en proposiciones aritméticas. Lo que nos quiere decir es que ella es verdadera sí y sólo sí *p* no es demostrable.

Ahora bien, para cualquier función proposicional $F(x)$ con una variable, existe un número *n* que es el número de Gödel de la proposición que obtenemos al introducir *n* en la función. Si tomamos ahora la función proposicional ¬Pr más el lema en diagonal, tenemos que existe un número, llamémosle *g*, tal que *g* = GN(¬Pr(*g*)). *g* es justo el número de Gödel de la proposición que nos dice que el número *g* carece de la propiedad aritmética Pr, la cual pertenece a todos aquellos números que son números de Gödel de proposiciones demostrables. Introducimos ahora la proposición *G*, la cual nos dice que el número *g* carece de la propiedad Pr, es decir, *G* = ¬Pr(*g*), por lo que GN(*G*) = *g*. Esto quiere decir que ¬Pr(GN(*p*)) es verdadera sí y sólo sí *p* no es demostrable. Ya que en nuestro primer caso *p* = *G*, y ya que GN(*G*) = *g*, tenemos que ¬Pr(*g*) es verdadera sí y sólo sí *G* no es demostrable. Por lo que *G* es verdadera sí y sólo sí *G* no es demostrable, mostrando así la existencia de una proposición que es tanto verdadera como no demostrable dentro de un sistema consistente. *G* es una proposición meramente aritmética que, al mismo tiempo, "habla" acerca de sí misma.

En su introducción a la versión en castellano de *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines, I* Garrido (2009) recupera una interpretación de Kripke donde se simula la fórmula de Gödel en lenguaje natural que dice:

> Supóngase la oración: «Alicia es bella», y que no hay aún nada decidido en nuestro lenguaje acerca de a quién o a qué pueda referirse la palabra «Alicia><, lo cual, obviamente, no permite decidir ni el sentido ni la verdad de la oración mentada. Pero supóngase además que ahora convenimos en dar a esa oración el nombre de «Alicia» y que, cautivado por la música de las palabras, digo que «Alicia es bella». Al hablar de la belleza de Alicia no me refiero en este caso a la bella nínfula, real o ficticia, que dio vida a las fantasías oníricas de Lewis Carroll, sino que hablo de la belleza de la oración que habla de la belleza de Alicia. Pero Alicia, por virtud del acuerdo referencial recién tomado, no es otra, precisamente, que la oración de la que hablo, la cual desde este momento cobra automáticamente sentido y - al menos para mí, si la belleza es sólo cuestión de gusto - verdad. Esta oración es claramente autorreferente y, aunque muy bien pudiera ser que un psiquiatra la calificase de narcisista, no incurre en la falacia

[50] Para lo siguiente utilizaremos la presentación de Goldstein (2005) ya que, a nuestro parecer, cumple con los elementos necesarios para brindar un acercamiento lo suficientemente accesible, sin perder los puntos importantes de las pruebas de Gödel.

> del círculo vicioso, que es, según Russell, el pecado mortal de las paradojas lógicas. (39-40)

2.2.2: El segundo teorema de incompletud

Tomando en cuenta todo lo anterior, el segundo teorema de incompletud de Gödel es un corolario del primero y nos dice que:

Sea $\mathbf{T}$ *una teoría formal consistente que contenga a la aritmética. Tenemos entonces que* $\mathbf{T} \nvdash Con_T$*, donde* Con_T *es la proposición que afirma la consistencia de* $\mathbf{T}$. En la presentación de Kunnen (2013) tenemos que *si* Γ *es una axiomatización formal para los fundamentos de las matemáticas, como lo es ZFC, y* $\Gamma \vdash Con(\Gamma)$*, entonces* Γ *es inconsistente.*

$Con(\Gamma)$ es un enunciado formal en el lenguaje de Γ que nos dice que Γ es consistente, es decir, no puede demostrar ningún $\phi \wedge \neg\phi$. El segundo teorema de incompletud asume que la propiedad de pertenencia en Γ es decidible[51] y que es lo suficientemente fuerte como para permitir razonamiento finitista.

De igual modo, con las herramientas ya presentadas dentro de la prueba del primer teorema, podemos establecer que en nuestro sistema formal *S*, si este es consistente podemos demostrar tanto Con_T como *G*, pero esto contradice al primer teorema, por lo que Con_T no puede ser demostrable en *S*.

Como mencionamos anteriormente, existen múltiples lecturas respecto a las posibles implicaciones que ambos teoremas tienen para diversos campos del conocimiento, pero nosotros nos centraremos únicamente en realizar una lectura realista de estos resultados, con mayor énfasis en el segundo teorema de incompletud, con miras a justificar platonistamente el axioma de constructibilidad $V = L$. Ese será el propósito a seguir en el siguiente capítulo.

[51] Existe un procedimiento finito y efectivo para determinar si una fórmula bien formada es o no un teorema dentro de nuestro sistema.

3: Matemáticas objetivas[52]: El realismo matemático de Kurt Gödel

3.1: Realismo gödeliano

3.1.1: Las influencias filosóficas

Junto con los teoremas de incompletud, quizá sea la postura metafísica de Gödel respecto a las entidades matemáticas lo más conocido fuera del ámbito de la lógica matemática. Como mencionamos anteriormente, Gödel se ubica como un platonista dentro de nuestra taxonomía y es en sus artículos de 1944 y 1947 donde presenta de manera explícita su posición metafísica, por lo que serán el principal sustento filosófico que utilizaremos a lo largo del presente apartado.

Mucho se ha escrito respecto a las influencias filosóficas en el pensamiento de Gödel, algunos centrándose en el giro fenomenológico que tomara hacia el final de su vida, principalmente influido por la lectura detenida de la obra de Husserl (Kennedy, Wang, Hauser) así como la influencia de Leibniz a lo largo de su carrera (van Atten, Parsons) y, en los últimos años, la recuperación que se ha realizado sobre la influencia de Bertrand Russell en su pensamiento (Kanamori, Floyd). Conociendo estos elementos podremos ir esclareciendo el porqué del tipo de realismo al que Gödel se adscribe. Finalmente, no debemos perder de vista el hecho que, académicamente, Gödel no fue un filósofo, sino un matemático, por lo que una lectura filosófica de sus trabajos necesita ser justificada. Autores como Rodríguez Consuegra[53] sostienen la tesis, severa a nuestro parecer, según la cual, antes de ser un matemático Gödel fue un filósofo, obligándonos a ver todas sus aportaciones a la lógica y a las matemáticas como meros materiales auxiliares para sostener su posición filosófica. Si la tesis de Rodríguez Consuegra es verdadera o falsa es algo que, en primer lugar, excede los propósitos de la

[52] Rudy Rucker menciona que "I do objective mathematics" es el credo de Kurt Gödel, recordando con esto la postura platonista que mencionamos previamente. Para Gödel, incluso en el caso del infinito, las matemáticas no dejan de ser una ciencia esencialmente empírica (Rucker, 2012).

[53] Principalmente cuando nos dice "Gödel was mainly a philosopher searching for mathematical results to illustrate, if not to prove, the truth of a philosophical position, apart from the mathematical interest of those results. That philosophical position was a twofold kind of Platonism, i.e., ontologically, the belief in the existence of separate and trascendent abstract entities, and epistemologically, the belief in the existence of a human intuition allowing us somehow direct access to those entities" (en Zalamea, 1996: 366) y nuevamente al decir "I think that Gödel's philosophy of mathematics was only part of a consistent whole, and that it can be interpreted not only as a fortunate motivation, but also as the main objective of his intellectual life" (en Zalamea, 1996: 367)

presente investigación y, en segundo, no depende de nosotros el calificar. A pesar de esto, es a nuestro parecer claro que una tesis como la suya, con ciertos matices, no es del todo descabellada, ya que podemos percibir el impacto que algunos de los desarrollos técnicos de Gödel han tenido en el campo de la filosofía, principalmente dentro de la lógica, así como el que Gödel no parece ser alguien ajeno a las discusiones filosóficas de su época, llegando a entablar relación con algunos miembros del Círculo de Viena y, a la par, realizado trabajo como reseñista de textos filosóficos de autores como Russell y Carnap.[54] Presentemos por ahora las principales influencias filosóficas de Gödel.

De inicio, y empatando con la postura sostenida por Consuegra, todo parece iniciar con lo que Goldstein (2005) llama "el axioma de Gödel" esto es, la idea de que para cualquier hecho existe una explicación que da cuenta del porqué ese hecho es un hecho, porqué es que debe ser un hecho y, en suma, la idea de que en su sentido más fundamental, el mundo es inteligible. El vínculo con el pensamiento de Leibniz se vuelve evidente, específicamente, con su idea de *Characteristica Universalis*, según la cual es posible establecer un lenguaje cuyas categorías y combinaciones reflejen de manera acertada la estructura de la realidad misma, evitando así la "contaminación" por parte de una perspectiva humana. En el artículo de 1944 Gödel menciona:

> it seems reasonable to suspect that it is this incomplete understanding of the foundations which is responsible for the fact that mathematical logic has up to now remained so far behind the high expectations of Peano and other who (in accordance with Leibniz's claims) had hoped that it would facilitate theoretical mathematics to the same extent as te decimal system of numbers has facilitated numerical computations. For how can one expect to solve mathematical problems systematically by mere analysis of the concepts occurring if our analysis so far does not even suffice to set up the axioms? But there is no need to give up hope. (152)

Kennedy y van Atten (2003), nos mencionan que no existe mucha evidencia respecto al momento en el dió inició la fascinación de Gödel por Leibniz pero, en conversación con Wang (1996), se sabe que su proyecto metafísico consistía en una transformación de la monadología de Leibniz en una teoría exacta. De hecho, Wang nos recuerda que hasta 1976, Gödel se refería a su postura filosófica como una monadología (309). Será sin embargo hasta su lectura de la obra de Husserl cuando Gödel encuentre el aparato conceptual para ejecutar su proyecto.

Sobre la influencia de Husserl en Gödel se ha escrito ya demasiado, por lo que presentaremos, de manera resumida, lo que Kennedy (2003, 2009) y Hauser (2006) han dicho al respecto. De inicio, Gödel consideraba a Husserl como el filósofo más importante desde Leibniz, siendo la fenomenología el avance conceptual de las ideas de Leibniz, específicamente su ideal de "ver" los conceptos de una manera clara y distinta. Realizando un intercambio entre "esencia"

[54]Si bien la influencia de los desarrollos de Gödel ha sido, en gran parte, positiva, no podemos negar que sus teoremas de incompletud han sido abusados por una parte de la comunidad filósofica para defender toda una serie de implicaciones que poco o nada tienen que ver con la formulación que Gödel hizo de los mismos, llegando, incluso, a ser catalogado como un pensador posmoderno por su "quiebre" de la noción de "verdad". Para más sobre este tema, se remite al lector a los textos de Franzén (2005) y Berto (2009).

y "concepto", Gödel realiza una lectura novedosa de las ideas de Husserl, transformando a la fenomenología. En palabras de Hauser "phenomenology was seen by Gödel not as a systematic theory, but as a technique for arriving at a philosophical understanding - as opposed to a verification - of our fundamental assumptions concerning objectivity, truth, being, etc." (550). ¿Por qué mirar hacia la fenomenología? Kennedy nos dice al respecto:

> What Gödel needed, then, to bridge the gap between his realist convictions and the rational arguments he was able to find to support them, was a account of subjectivity that integrates rationality and Platonism. We will suggest below that this was the issue that provoked his 'conversion' to phenomenology. (2003: 438)

Kennedy y van Atten sostienen que la atracción de Gödel por el pensamiento de Husserl se debe en gran medida a su doctrina del idealismo trascendental. *Grosso modo*, las posturas idealistas sostienen la existencia de un plano "no físico", el plano de lo "ideal". Aunque el modo en que se utiliza el término "ideal" depende del tipo de idealismo que se esté defendiendo, existen algunas características comundes: 1) un plano para caracterizar a los objetos en un plano independiente, o 2) un plano para caracterizar a los objetos que dependen de éste. De este modo, el idealismo no es incompatible con posturas realistas ya que, en algunos casos, requiere de éste para justificar el plano de lo real.

El plano de lo ideal es aquí entonces el plano de la "posibilidad de consciencia", donde la existencia de cualquier objeto es equivalente a su "acceso" para cualquier sujeto posible, en palabras de Husserl:

> Of essential necessity (in the Apriori of the unconditional eidetic universality) to every 'truly existing' object there corresponds the idea of a possible consciousness in which the object itself is seized upon originarily and therefore in a perfectly adequate way. Conversely, if this possibility is guaranteed, then eo ipso the object truly exists. (1913: 341).

Postular la existencia de algún objeto pero negar su acceso para cualquier consciencia posible es algo que, para Husserl, no tiene sentido. Esto es lo que parece haberle interesado a Gödel, la capacidad de vincular el idealismo y el realismo de una manera totalmente novedosa en su momento:

> Husserl seems to have found a way to do justice both to what is valid in idealism and to what is valid in realism; he denied the validity of each as a whole, but claimed that his transcendental idealism includes what is correct in them. From realism, he accepted that objects are not created by our consciousness, but rejected the idea that the objects are independent in the strong sense of being unknowable things in themselves. Instead of the principled disconnectedness implied by that notion, Husserl distances himself from Kant and offers his correlation thesis, which is the specifically idealistic element in Husserl's transcendental idealism. However, at the same time he rejects the idea that accesibility must mean accesibility to any particular subject at any particular time, because the theis is formulated in terms of a *possible* consciousness; thus he avoids Berkeleyan idealism as well. (Kennedy, 2003: 448-449)

Recordemos que, para Husserl, todo conocimiento debe sostenerse en la intuición, y esto es, quizá, uno de los tópicos más controvertidos de la filosofía gödeliana. Así, en su artículo de 1964 nos dice:

> [T]he objects of transfinite set theory [...] clearly do not belong to the physical world and even their indirect connection with physical experience is very loose. But, despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them and, moreover, to believe that a question not decidable now has a meaning and may be decided in the future. The set-theoretical paradoxes are hardly any more troublesome for mathematics than deceptions of the senses are for physics. (271-272)

La "intuición matemática" postulada por Gödel no es un hecho epistemológico, sino uno psicológico. La diferencia aquí es importante ya que, respecto a la posibilidad de acceder a los objetos en la realidad, la primera nos lo permite, mientras que la segunda no. Gödel utiliza lo anterior para sostener que la decidibilidad o la importancia de proposiciones como CH pueden ser aseguradas sin depender del realismo. Así, en este pasaje de clara influencia husserliana, Gödel dice:

> However, the question of the objective existence of the objects of mathematical intuition [...] is not decisive for the problem under discussion here [...] The mere psychological fact of the existence of an intuition which is sufficiently clear to produce the axioms of set theory and an open series of extensions of them suffices to give meaning to the question of the truth or falsity of propositions like Cantor's continuum hypothesis (272)

¿Por qué presenta Gödel un argumento como éste que minimiza el papel del realismo? Kennedy supone que este argumento tiene un propósito dialéctico para Gödel: al sugerir una alternativa al realismo como base para creer en la decidibilidad de proposiciones indecidibles en la teoría de conjuntos, Gödel mantiene de fondo que, a pesar de tener esta alternativa (que él no tomará), su idea principal es la correcta, a saber, la importancia de la decidibilidad (2006: 27). Aunque, siendo muy estrictos, si bien Gödel está dando una posibilidad de no depender del realismo en ontología, no lo hace respecto al realismo en valor de verdad: la alternativa sigue siendo, en el fondo, realista. Sobre esto es lo que nos habla Burgess (2014) cuando nos dice que Gödel parece saltar entre una intuición sobre los objetos de la teoría de conjuntos a una sobre la verdad de los axiomas de la teoría de conjuntos, cuando nos dice:

> For someone who considers mathematical objects to exist independently of our constructions and of our having an intuition of them individually, and who requires only that the general mathematical concepts must be sufficiently clear for us to be able to recognize their soundness and the truth of the axioms concerning them, there exist, I believe, a satisfactory foundation for Cantor's set theory in

> this whole original extent and meaning, namely, axiomatic set theory interpreted in the way sketched below[55]. (Gödel, 1964: 262)

¿A qué se refiere Gödel cuando nos habla de la existencia de algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos? Las respuestas podrían ser o,

1 Incluso en el caso de la percepción sensorial no tenemos una percepción inmediata de los objetos físicos, sino que formamos ideas a partir de lo que sí percibimos inmediatamente, algo así como un aristotelismo matemático.

2 El problema de la existencia de objetos matemáticos es una réplica exacta del problema de la existencia de los objetos físicos, como parece indicarlo la cita párrafos arriba.[56]

Por su parte, Martin (2005) sugiere que Gödel no hablaba de la percepción de los objetos de la teoría de conjuntos sino más bien de la percepción de la estructura del universo teórico conjuntista, ofreciendo un vínculo con un realismo estructural como el defendido por Shapiro y otros. Sin embargo, en su estudio introductorio al artículo de 1944, Parsons nos recuerda que el realismo particular que Gödel asume no sólo lo compromete con la existencia de objetos abstractos como "conjuntos" o "clases", entendidas éstas como "pluralidades de cosas" (106), sino que asumirá de igual modo la existencia objetiva de "conceptos", esto es, la existencia de propiedades y relaciones de cosas que existen de manera independiente a nuestras definiciones y construcciones (106), utilizando como argumento un símil de las entidades abstractas con las entidades físicas, como lo sugiere la segunda posible interpretación:

> It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory system of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions. (1944: 137)

La cita anterior nos permite realizar múltiples lecturas. Para empezar, está el hecho de establecer un paralelismo entre las entidades abstractas y las físicas, justificando el que las primeras sean necesarias para el establecimiento de una teoría satisfactoria. Versiones similares a este argumento es lo que presentamos anteriormente como argumentos de indespensabilidad, siendo el argumento de Gödel presa a los mismos problemas que mencionamos. Autores como Folina (2014) nos indican que el argumento que Gödel está planteando tiene más que ver con la llamada "inferencia a la mejor explicación" al asumir la existencia de las entidades abstractas como la "mejor opción" para garantizar la efectividad de nuestras teorías científicas. La lectura de Folina es interesante porque nos permite observar que el papel de la intuición no es sólo para objetos o elementos, sino que habla también acerca de los axiomas que, a pesar de que actualmente sean incompletos, nos dan una idea del dominio de objetos sobre los que estamos hablando, es decir, "criteria of truth and falsity are thus meaningfully applicable not only to known results but also to new axioms" (37). De igual

[55]En este punto, Gödel está hablando de la jerarquía acumulativa de conjuntos o la concepción iterativa de conjunto.

[56]*Cfr.* Tait (1986)

modo, que tengamos una intuición respecto a los objetos o axiomas de la teoría de conjuntos no implica que ésta será inmediata, ya que, como vimos anteriormente, esto puede decirse de igual manera sobre los objetos físicos. Así, Gödel menciona:

> It should be noted that mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving an *immediate* knowledge of the objects concerned. Rather it seems that, as in the case of physical experience, we *form* our ideas also of those objects on the basis of something else which *is* immediately given. (1964: 272)

Esto es lo que Kennedy (2003) llama "paridad epistemológica", la idea según la cual los objetos físicos van "de la mano" con los objetos abstractos o matemáticos, apelando a que los problemas epistemológicos que surgen al aceptar la existencia de los objetos físicos no son menores de aquellos que genera el aceptar la existencia de los objetos abstractos o matemáticos (435). Al colocar ambos tipos de objetos en el mismo nivel, Gödel no tendrá que preocuparse por dar argumentos específicos para cada uno, sino que puede dedicarse a una defensa de su realismo con todos los objetos habitando un mismo nivel, apelando ahora sí, a las herramientas conceptuales que ha obtenido de la fenomenología husserliana y los resultados obtenidos con los teoremas de incompletud y la consistencia de CH con ZF, dará inicio a su proyecto de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos.

Antes de pasar al programa de Gödel creemos importante volver al porqué de una lectura filosófica de sus resultados ya que, si bien se presentó un poco la tesis de Rodríguez Consuegra es necesario el mostrar más material que apoye una lectura de este tipo. Para empezar, Feferman (1998: 150) nos dice que Gödel había asumido ya un realismo filosófico desde sus primeros años en la universidad, diciendo incluso que fue gracias a esta postura que pudo alcanzar sus logros en el campo de la lógica matemática durante los años 30's. Esto puede ser relacionado con lo dicho por Goldstein, según la cual a Gödel sólo le interesaban los problemas de genuina importancia, es decir, aquellos que habitan en la intersección entre las ciencias exactas y los problemas filosóficos. Incluso sobre el asunto de la paridad epistemológica que vimos anteriormente, Feferman nos dice:

> But it was Gödel who emphasized in 1944 that one must look to the conception of classes as entities having an existence independent of human thoughts and constructions in order to provide the proper interpretation of the resulting theory (as well as various theories of sets). Perhaps to ward off criticisms of this strong platonist (philosophically realist) position, Gödel compared the assumption of the existence of underlying physical objects, arguing that such assumptions were needed in both cases to deduce the data of ordinary experience, and were necessary to obtain a satisfactory account of that experience. (152)

La importancia de la interpretación de Feferman radica en traer a cuento un elemento novedoso: ciertas reservas por parte de Gödel para mostrar su platonismo abiertamente buscando siempre otras posibles rutas que llevaran a la misma conclusión, esto debido a que durante la época de los desarrollos más importantes de Gödel, el standard respecto a los problemas fundacionales, eran las ideas de Hilbert, una visión de las matemáticas totalmente combinatoria, donde su existencia radica en el mero hecho de combinar los distintos símbolos para obtener resultados diversos, un nominalismo al más puro estilo medieval. De igual modo, en correspondencia con Wang (1974), Gödel llega incluso a mencionar que Skolem ya contaba con los elementos técnicos necesarios para la demostración del teorema de completud del cálculo de primer orden con predicados, pero que no pudo llegar a ésta debido a que carecía de la actitud epistemológica necesaria respecto a las metamatemáticas y al pensamiento no-finitario[57]. Vinculado a lo anterior, tenemos que, respecto a la indecidibilidad como propiedad de ciertas proposiciones, Gödel nos dice:

> However in consequence of the philosophical prejudices of our time 1. nobody was looking for a relative consistency proof because [it] was considered axiomatic that a consistency proof must be finitary in order to make sense, [and] 2. a concept of objective mathematical truth as opposed to demonstrability was viewed with greatest suspicion and widely rejected as meaningless. (en Feferman, 1998: 160)

Lo anterior apoya la tesis principal del artículo del 2016 de Kanamori y Floyd, a saber, que el trabajo matemático de Gödel se encuentra motivado de manera substancial por su postura filosófica, remitiéndonos nuevamente, a la tesis principal de Rodríguez Consuegra:

> Gödel's philosophical position cannot (should not) be put aside and be taken into consideration only in a secondary way in relation to his mathematical results and arguments: for him both were inextricably tied, and this in such a way that one can even mantain - as I do - that for him his philosophical beliefs were by far, the more important, while whis mathematical work was, somehow, a search for arguments which might be used in support of those deep beliefs. (en Zalamea, 1996: 368)

Con todo lo anterior tenemos, a nuestro parecer, los elementos suficientes para realizar una lectura platonista del resultado de independencia de CH pero, antes de llegar a eso, presentaremos el programa de Gödel para la búsqueda de nuevos axiomas.

3.1.2: El programa de Gödel: La búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos

Una de las consecuencias del realismo gödeliano es la necesidad de obtener una respuesta definitiva respecto al valor de verdad de CH ya que, recordemos, mantener un realismo respecto al valor de verdad nos obliga a sostener que toda proposición matemática tiene una y sólo una posibilidad: ser verdadera o falsa. A partir del desarrollo del *forcing* por parte de Cohen, sabemos que CH es independiente de ZF. A pesar de ser un resultado que llegó 20 años después del resultado de Gödel, era ya una opción que Gödel mismo había considerado en su artículo de 1947 como la más probable y que le sirvió de motivación para lo que ahora conocemos como "programa de Gödel", la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos que sean los suficientemente fuertes como para poder decidir todos los problemas indecidibles de ZFC. La motivación surge cuando Gödel nos dice:

[57] *Cfr.* Feferman (1998).

> For first of all the axioms of set theory by no means form a system closed in itself, but, quite on the contrary, the very concept of set on which they are based suggest their extension by new axioms which assert the existence of still further iterations of the operation “set of” [...] Furthermore, however, even disregarding the intrinsic necessity of some new axiom, and even in case it had no intrinsic necessite at all, a decision about its truth is possible also in another way, namely, inductively by studying its “success”, that is, its fruitfulness in consequences and in particular in “verifiable” consequences, i.e., consequences demonstrable without the new axiom, whose proofs by means of the new axiom, however, are considerably simpler and easier to discover, and make it possible to condense into one proof many different proofs. (1947: 181-182)

Una conclusión de lo anterior es que los actuales axiomas de la teoría de conjuntos son incompletos, esto debido a que si tuvieramos un sistema axiomático bien determinado, hipótesis como CH serían verdaderas o falsas y no indecidibles. De igual modo, Gödel nos presenta dos formas de justificar la adopción de un nuevo axioma para nuestro sistema, a saber, justificaciones intrínsecas y justificaciones extrínsecas. Las intrínsecas tienen como características el ser intuitivas, autoevidentes al formar parte del “concepto de conjunto” y de la operación “ser conjunto de”, mientras que las extrínsecas son calificadas según su efectividad, su productividad y riqueza en consecuencias que no tendríamos si no utilizáramos tal axioma, o en palabras de Gödel:

> There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole discipline, and furnishing such powerful methods for solving given problems [...] that quite irrespective of their intrinsic necessity they would have to be assumed at least in the same sense as any well-established physical theory. (1947: 182-183)

Ejemplos de axiomas justificados de manera intrínseca serían los axiomas de grandes cardinales que parten de la idea que la jerarquía acumulativa de conjuntos “crece” infinitamente, o el llamado “principio de reflexión” según el cual cualquier proposición teórico conjuntista que existe en V existe también en un segmento inicial V_α, mientras que uno de los axiomas más conocidos que se justifica extrínsicamente es el axioma de elección.

El programa ha marcado el camino a seguir en el panorama contemporáneo de la teoría de conjuntos. Gente como Peter Koellner o Hugh Woodin se han dedicado a trabajar en la búsqueda de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos partiendo desde las consideraciones intrínsecas, buscando en axiomas de reflexión, determinación y, particularmente en el axioma *V = Ultimate L* una manera de decidir CH utilizando consideraciones intrínsecas, mientras que autores como Donald Martin o Stevo Todorcevic se han dedicado en explorar el panorama contrario llevando hasta sus últimas consecuencias las motivaciones extrínsecas con el llamado *Martin’s maximum.*

Pero el programa de Gödel no es un mero “cronograma de actividades” con pasos detallados para decidir todas las proposiciones de las matemáticas, es más bien una declaración de principios, un manifiesto por parte de Gödel para indicar que, más allá de las posturas filosóficas que se tengan respecto a las entidades matemáticas, ya sea uno un formalista, un intuicionista o un realista, la necesidad de encontrar un valor de verdad definitivo para nuestras proposiciones matemáticas es la motivación que unifica a todas. Es difícil de calificar si en este punto Gödel está "pecando de inocencia" o si está imponiendo el realismo en valor de verdad como la única postura para aquellos que trabajan en los fundamentos de las matemáticas. Lo que es el caso es que tal "optimismo gödeliano" está lejos de ser el estándar en la actualidad, teniendo como ejemplo la disputa entre los llamados "universistas", aquellos que sostienen la existencia de un sólo modelo de ZFC que no puede ser extendido, y los "multiversistas", para quienes, dado cualquier universo conjuntista, existe una extensión de éste. La verdad de una proposición, en el caso de estos últimos, es sólo relativa al modelo en cuesitón, no existiendo, por lo tanto, criterios suficientes para escoger un modelo por sobre otro para poder establecer, algo así, como un "modelo predilecto" de ZFC. Estamos ya muy lejos del panorama considerado por Gödel.

Sírvanos, de igual modo, la presentación del programa de Gödel como un ejemplo de la tesis general de este proyecto, a saber, que consideraciones metafísicas respecto a la naturaleza de las entidades matemáticas pueden influir en los desarrollos técnicos de ciertos autores, como lo es en el caso de Gödel, y que la dirección contraria también puede ser abordada, es decir, que podemos rastrear en ciertos desarrollos técnicos intuiciones metafísicas que están guiando desde el fondo la dirección de la investigación.

3.1.3: Una interpretación platonista de los teoremas de incompletud

Una de las principales consecuencias de los teoremas de incompletud de Gödel es la posibilidad de realizar una lectura realista a partir de ellos, principalmente del segundo. Como hemos presentado anteriormente, creemos, esta es la lectura preferida por Gödel, por lo que antes de presentarla, recordemos lo que nos dice el segundo teorema:

Segundo teorema de incompletud: A partir del hecho que *S* (nuestro sistema formal) es solamente consistente, se sigue la indemostrabilidad de *G* (nuestra fórmula de Gödel que dice de sí misma el ser indemostrable). Por la numeración de Gödel tenemos que la propiedad de ser "solamente consistente" puede ser expresada dentro de *S* misma por una fórmula, llamémosla "Con" y que la implicación "si nuestro sistema es solamente consistente entonces *G* es indemostrable" puede ser formalizada dentro de *S* como la fórmula $Con \to G$, diciendo de *G* que "*G* es indemostrable". Por lo tanto, si "Con" fuera demostrable en *S*, *G* estaría contradiciendo el primer teorema de incompletud de Gödel en el caso de que *S* sea consistente, por lo que *Si S es solamente consistente, la fórmula* "Con" *que expresa la consistencia del sistema mismo, es indemostrable en S.*[58]

Siguiendo a Berto (2007) y a Goldstein (2005), Gödel consideraba al segundo teorema de incompletud como el fundamento del platonismo, utlizando un resultado matemático para resolver un problema filosófico, como nos lo menciona Kreisel "Gödel programme is nothing else but the first genuine proposal for implementing those realist intentions by deriving from them new axioms" (1980: 210). Lo anterior significa que como cualquier sistema formal lo suficientemente fuerte para probar verdades de la aritmética no puede probar *todas* las

[58] *Cfr.* Kleene (1987).

verdades, mostrando de esta manera cómo el divorcio entre "verdad" y "demostrabilidad" va más allá de las meras consideraciones prácticas que tengamos respecto a las entidades matemáticas, siendo entonces un argumento a favor del platonismo, toda vez que la noción de "verdad" es, por decirlo de algún modo, más "grande" que la de "demostrabilidad", lo que significa que la realidad matemática, aquello de lo que podemos predicar "verdad" en realidad, sobrepasa los requirimientos para la construcción de sistemas formales, su característica finitaria, una realidad que siempre va más allá de nuestros intentos por capturarla con precisión, en palabras de Goldstein:

> [γ] is both unprovable and, given that *that's what it says*, it's also true. We haven't shown that it's true by finding a proof for it within the formal system, using the purely mechanical rules of that system, that is, by deducing it. Rather, we've shown it's true by, ironically, going outside the system and showing that no proof for it *can* be produced within the formal system [...] Gödel's result, in effect, proclaims the robustness of the mathematical notion of infinity; it can't be drained of its vitality and turned into a ghostly Kantian-type idea hovering somewhere over, but without entering int, mathematics. The mathematician's intuitions of infinity - in particular, the infinite structure that is the natural numbers - can no more be reduced to finitary formal systems than they can be expunged from mathematics [...] There remains something -always- that eludes capture in a formal system, It was in this metalight that Gödel viewed his incompleteness theorems. (2005: 183, 186 - 187).

La trascendentalidad de la verdad queda entonces asegurada en un campo en el que, si bien nuestros axiomas actuales no pueden dar cuenta de la verdad o falsedad de ciertas proposiciones, existe un valor de verdad definitivo para éstas. Recordemos que, si bien parece un problema de carácter ontológico, Gödel está sosteniendo de fondo una tesis epistemológica, esto debido al doble juego que vimos antes entre realismo e idealismo dentro de la postura gödeliana, a saber, mientras el realismo nos obliga a concentrarnos en los objetos, el idealismo nos dirige hacia los procesos mediante los cuales adquirimos conocimiento respecto a esos objetos y a los procesos mismos. El realismo en valor de verdad es, a nuestro parecer, la conclusión más fuerte que puede uno tener de los teoremas de incompletud de Gödel, obligando tanto a formalistas como a intuicionistas a aceptar que pueden estar en desacuerdo respecto a la existencia *per se* de los objetos que estudian, más no respecto al hecho de que toda proposición tiene, incluso considerando el fenómeno de la indecidibilidad, un valor de verdad definitivo.

No se apela entonces únicamente a la existencia específica de ciertos objetos, sino a la existencia de una única verdad objetiva, una que existe en el plano de lo matemático y a la que nos acercaremos poco a poco mientras vayamos descubriendo nuevos axiomas que nos permitan abarcar cada vez más y de una manera más precisa lo que ahí habita: la analogía con el explorador tomada de la manera más seria posible.

¿Podemos entonces establecer una lectura similar respecto a resultado de consistencia de CH? A nuestro parecer no, ésto por dos razones. La primera es la carencia de material donde Gödel hable de manera abierta sobre tales intenciones y, en segundo lugar, porque la consecuencia realista del segundo teorema de incompletud es demasiado amplia, mientras que el resultado de consistencia de CH es más bien local. A pesar de ésto, creemos que, si bien no es posible una lectura con las mismas implicaciones, sí lo es respecto a una lectura más moderada, una lectura que tenga como único propósito el mostrar que, como vimos anteriormente, al momento de elegir trabajar sobre CH, Gödel partió de su realismo para construir el universo L y lo asumió al momento de establecer el axioma de constructibilidad.

3.2: Una interpretación platonista del axioma de constructibilidad $V = L$

Con todo lo anterior creemos tener ya los elementos suficientes para aventurarnos a ofrecer una lectura platonista del resultado de consistencia de CH alcanzado por Gödel en 1938. Para ello nos apoyaremos en el trabajo que han realizado en los últimos años Floyd y Kanamori, específicamente su artículo de 2016 donde se dedican a explorar los lazos y elementos comunes entre los pensamientos de Gödel y Russell, principalmente durante sus primeros escritos filosóficos y matemáticos donde, sobre todas las cosas, Russell abordó el problema de la verdad que, al parecer, fue el hilo que ata filosóficamente las obras más importantes de Gödel.

De acuerdo a estos autores es el pensamiento de Russell y no el de Husserl el que dejó la marca más fuerte dentro de la filosofía de Gödel. Contraria a la lectura tradicional del Gödel filósofo que, influido por Leibniz descubre a Husserl, es más bien el Russell de los *Principles of Mathematics* y *Principia Mathematica* el que formó el pensamiento del joven Gödel y de quien tomará la estafeta para continuar con su proyecto una vez que éste fue "seducido" por el pensamiento de Wittgenstein y abandonó la búsqueda por un concepto robusto, objetivo, de la verdad. Se tiene bien documentado en el *Nachlass* de Gödel cómo desde sus años de estudiante en la Universidad de Viena, Gödel consultó varios de los primeros ensayos filosóficos de Russell (Floyd y Kanamori, 2016), donde, lejos de ser ese conocido crítico del realismo profesado por Gödel, Russell mismo se presenta como un platonista. Al respecto Gödel nos dice:

> Concerning my "unadulterated" platonism, it is no more "unadulterated" than Russell's own in 1921, when in the *Introduction* [*to Mathematical Philosophy*, first published in 1919, p. 169] he said "[Logic is concerned with the real world just as truly as zoology, though with its more abstract and general features]." At the time evidently Russell had met the "not" even in this world, but later on under the influence of Wittgenstein he chose to overlook it. (en Wang, 1987: 112)

Es importante recordar que el Russell del que Gödel está hablando se encuentra presente en los *Principia* uno de los textos más relacionados con Gödel, principalmente por los resultados de sus teoremas de 1931 y, como veremos más adelante, con los resultados de consistencia de CH.

Cabe preguntarnos entonces, ¿qué fue específicamente lo que Gödel recuperó o, más bien, se "apropió" del pensamiento de Russell? Siguiendo a Floyd y Kanamori (2016) durante los años del Círculo de Viena, Gödel asistió a las sesiones en las que se discutieron algunos de los textos del joven Russell, estableciendo su propia lectura de los mismos. Así, a pesar de estar vinculado al Círculo de Viena, la posición filosófica de Gödel dista mucho de la sostenida por sus miembros más relevantes, principalmente de la visión de Rudolf Carnap según la cual las matemáticas son una mera herramienta lingüística, una sintaxis del lenguaje. Sin embargo, la noción de verdad no es definible, siendo únicamente la noción de demostrabilidad la que podemos definir. Es en esta distinción donde se asoma la influencia de Russell en el pensamiento de Gödel porque, para establecer formalmente esta idea, utilizará el entramado conceptual desarrollado por Russell en su ***teoría ramificada de tipos*** que, ***grosso modo***, funciona como un esquema de definiciones lógicas basadas en órdenes y tipos indizados de manera implícita por los números naturales, procediendo de manera "intensional". Kanamori y Floyd nos dicen al respecto:

> He conceived this scheme as a clasification of propositions based on the notion of propositional function, a notion not reducible to membership (extensionality). Proceeding however in modern fashion, we may say that the universe is to consist of objects stratified into disjoint types T_n, where T_0 consists of the individuals $T_{n+1} \subseteq \{X \mid X \subseteq T_n\}$ and the types T_n for $n > 0$ are further ramified into orders O_n with $T_n = U_i O_n$. An object in O_n is to be defined either in terms of individuals or of objects in some fixed O^j_m for some $j < i$ and $m \leq n$, the definitions allowing for quantification only over O^j_m. (4)

Dentro de la teoría ramificada de tipos Russell y Whitehead, pueden sortear la "paradoja de Russell" y otras paradojas de círculo vicioso ya que los objetos pueden consistir, solamente, de objetos previos y éstos, a su vez, son construidos a través de definiciones que refieren a estadios anteriores. Sin embargo, una de las consecuencias que implica un sistema como éste es la imposibilidad de cuantificar sobre todos los objetos en un tipo T_n, lo que supone, como dice Kanamori, que la formulación de numerosas proposiciones matemáticas sean o bien complicadas o simplemente imposibles. Para poder sortear lo anterior, Russell tuvo que introducir el "axioma de reducibilidad" de acuerdo al que para cualquier objeto existe un objeto predicativo que tiene exáctamente los mismos constituyentes, es decir, la jerarquía de predicados, ya sean estos de primer o segundo orden o, incluso, de nivel superior, colapsan en el primer nivel, en otras palabras, para un predicado de cualquier orden existe un predicado en el nivel del primer orden que es equivalente a éste[59] (Coquand, 2014).

Las similitudes con el proyecto de Gödel, específicamente con la construcción del universo *L*, empiezan a notarse, principalmente con la idea ya presente en 1910 según la cual, la verdad se encuentra "ramificada" y "relativizada" en los niveles de la teoría de tipos, misma que a su vez constituye la idea central de los teoremas de incompletud: un tratamiento formal de la definibilidad de la demostrabilidad que, a través del proceso de aritmetización de la sintaxis sea capaz de guiarnos hacia una fórmula indemostrable basada en la predicación codificada (Floyd y Kanamori, 2016: 7). Es en este punto donde el trabajo de Gödel se convierte en el paso necesario para ir más allá de la teoría de tipos presentada en ***Principia*** y, manteniendo un platonismo como motivación metafísica, nos ayuda a hacer clara la distinción entre verdad y demostrabilidad. Podemos ubicar este platonismo cuando Gödel nos dice:

[59]Para futuras investigaciones sería interesante buscar los lazos conceptuales entre el axioma de reducibilidad de Russell y lo que eventualmente serían los principios de reflexión en teoría de conjuntos. Si bien creemos que se pueden vincular, tal investigación excede los propósitos de la presente investigación.

> This process of definition presupposes that the totality of all properties exists somehow independently of our knowledge and definitions, and that our definitions merely save to pick out certain of these previously existing properties. If we assume this, the method of non-predicative definitions is perfectly all right [...] But the situation becomes entirely different if we regard the properties as generated by our definitions. For it is certainly a vicious circle to generate an object by reference to a totality in which this very object is supposed to be present already. (1933: 19)

Y, posteriormente:

> The result of the preceding discussion is that our axioms, if interpreted as meaningful statements, necessarily presuppose a kind of Platonism, which cannot satisfy any critical mind and which does not even produce the conviction that they are consistent. (1933: 20)

Pero no sólo podemos ver en acción este platonismo en las motivaciones iniciales, sino que, a medida que la construcción de la jerarquía va aumentando en niveles y tamaño, los objetos ya definidos se vuelven cada vez más necesarios para justificar los siguientes. En palabras de Floyd y Kanamori:

> There is a gradual embrace of platonism in Gödel's progress in getting at higher and higher truth, in steady, expansive reaction to Russell: There is first the need for truth to frame unprovability for arithmetic; then the securing of truth in the "next higher system"; the self-freling need for higher and higher systems; and thus the entré into full-blown set theory with explicit indexing given by ordinals in autonomous progression. This is a step-by-step indispensability argument for platonism, with more and more objectification becoming indispensable. (13)

Nuevamente se hace presente un argumento de indispensabilidad pero un tanto distinto a los que presentamos anteriormente. Y es que, contrario a la interpretación de Floyd y Kanamori que se limita a mostrar cómo Gödel se fue adaptando a un platonismo a medida que avanza en la construcción de L, nosotros creemos que, dada la información recogida en Wang (1974, 1987) y Kennedy (2003, 2005) donde se muestra que desde su tiempo de estudiante Gödel ya se decía realista, es posible ir un poco más allá y establecer que no sólo en L encontramos elementos que apoyan un platonismo incipiente, sino que la misma prueba se encuentra guiada por convicciones platonistas.

Antes de pasar a este punto, recapitulemos lo anterior:

1 Tanto para Russell como para Gödel las nociones de "simplicidad", "definibilidad" y, por lo tanto, "verdad" son ideales y absolutas: *sólo* el método axiomático nos garantiza "verdad".

2 Ambos piensan de manera "vertical": hacia "arriba" siguiendo tipos transfinitos y hacia "abajo", siguiendo una teoría de la verdad como correspondencia en un nivel base.

Sobre esto último sírvanos recordar lo que dice Gödel:

> As will be shown in Part II of this paper, the true reason for the incompleteness inherent in all formal systems of mathematics is that the formation of ever higher types can be continued into the transfinite, while in any formal system at most denumerably many of them are available. For it can be shown that the undecidable propositions constructed here become decidable whenever appropriate higher types are added (for example the type ω to the system *P*). An analogous situation prevails for the axiom system of set theory. (1931: 191)

Vuelve a hacerse presente la noción de verdad, y es que para nosotros, a diferencia de para Floyd y Kanamori, antes que ser un realista en ontología Gödel es un realista en valor de verdad - por utilizar los términos de Shapiro - siendo la existencia de los objetos matemáticos una consecuencia y no el propósito inicial de su realismo. Vemos esto cuando en (1947) nos dice:

> [...] even if one should succeed in proving [the independence of the continuum hypothesis], this would [...] by no means settle the question definitively. Only someone [...] who denies that the concepts and axioms of classical set theory have any meaning (or any well-defined meaning) could be satisfied with such a solution, not someone who believes them to describe some well-determined reality. For in this reality Cantor's conjecture must be either true or false, and its undecidability from the axioms as known today can only mean that these axioms do not contain a complete description of this reality [...] Therefore one may as good reason suspect that the role of the continuum problem in set theory will be this, that it will finally lead to the discovery of new axioms which will make it possible to disprove Cantor's conjecture. (520).

La noción de una verdad matemática objetiva es, a nuestro parecer, el hilo rector del pensamiento de Gödel, la motivación que lo guía en la búsqueda de aquellos problemas matemáticos filosóficamente relevantes, mediante los cuales podrá sacar a la luz al menos una de las facetas de ese diamante que es la verdad. En sus palabras:

> I may add that my objectivist conception of mathematics and metamathematics in general, and of transfinite reasoning in particular, was fundamental also to my other work in logic. How indeed could one think of *expressing* metamathematics *in* the mathematical systems themselves, if the latter are considered to consist of meaningless symbols which acquire some substitute of meaning only through metamathematics [...] if should be noted that the heuristic principle of my construction of undecidable number theoretical propositions in the formal systems of mathematics is the highly transfinite concept of "objective mathematical truth´´ as opposed to that of "demonstrability". (en Wang, 1974: 8-10)

El argumento que utilizará Gödel para defender esta postura sobre la verdad se basa, principalmente, en una alusión a la mente humana, es decir, dado el estado actual de la indecidibilidad como un hecho dado en la matemática actual, o bien las matemáticas son incompletas en el sentido de que la mente humana supera en potencia a cualquier máquina finita[60] o existen problemas diofánticos[61] absolutamente indecidibles. Sobre tal posibilidad Gödel escribe:

> Namely, if the first alternative holds, this seems to imply that the working of the human mind cannot be reduced to the working of the brain [...] On the other hand, the second alternative [...] seems to disprove the view that mathematics is only our own creation: [...] So [it] seems to imply that mathematical objects [...] exist objectively [...] that is to say [it seems to imply] some form or other of Platonism or "realism´´ as to the mathematical objects. (1951: 16)

Vemos entonces cómo es que a partir de un compromiso radical con la verdad matemática objetiva tenemos entonces como consecuencia la existencia de éstos objetos matemáticos. Teniendo entonces éstos objetos es que podemos vincular su argumentación con la interpretación tradicional de Gödel y su adopción del idealismo trascendental de Husserl, cuando nos dice:

> When I say that one can (or should) develop a theory of classes as objectively existing entities, I do indeed mean by that existence in the sense of ontological metaphysics, by which, however, I do not want to say that abstract objects are present in nature. They seem rather to form a second plane [*Ebene*] of reality, which confront us just as objectively and independently of our thinking as nature. (1954: 503, 505)

Es en este punto que la adopción de la maquinaria husserliana por parte de Gödel se vuelve necesaria. Como vimos párrafos atrás, nuestro acceso a este plano, según Gödel, se logra a través de la intuición matemática, unificando así cada uno de los elementos clave en su pensamiento. Inclusive, sobre la introducción del axioma de constructibilidad a los demás axiomas de ZF, el mismo Gödel nos dice "The proposition *A [V = L]* added as a new axiom seems to give a natural completion of the axioms of set theory, in so far as it determines the vague notion of an arbitrary infinite set in a definite way" (1938: 557). Si bien su platonismo fue evolucionando hacia una versión más radical mientras realizaba su trabajo en las pruebas más importantes de su carrera, creemos haber mostrado como es que este, aún en sus versiones más incipientes, fue la motivación principal que llevó a Gödel a elegir los problemas matemáticos sobre los que trabajó. A diferencia de Cohen que trabajó principalmente en análisis o Cantor cuyo interés inicial fue la teoría de números, Gödel habita, matemáticamente, ese extraño intersticio que era en su época la lógica matemática. En este sentido, vale recordar una anécdota. Cuando Gödel se estableció en el Instituto de Estudios Avanzados fue creado el departamento de lógica en el cuál él era el único miembro. Su cruzada por el reconocimiento de una verdad objetiva lo llevó a estar en lugares tan dispares como en el inicio del positivismo lógico hasta la fenomenología, pero manteniendo siempre ese impulso que Goldstein califica como el "axioma de Gödel":, la necesidad de una explicación para

[60] Autores como Lucas y Penrose han explorado a mayor profundidad este punto sosteniendo, *grosso modo*, que además de sus consecuencias matemáticas, el primer teorema de incompletud de Gödel muestra que la mente humana no es una máquina de Turing. Para más sobre este punto véase Penrose (1989) y (1994).

[61] Los problemas diofánticos son aquellos que se caracterizan por permitir solamente valores enteros, soluciones con números enteros.

todo hecho. Quizá fue necesario prestarle más atención a un personaje al que, desde que era un niño, se le conocía como *Der Herr Warum*, un personaje cuyos desarrollos cambiaron por completo el rumbo no sólo de la teoría de conjuntos sino de la matemática en general y que nos dejó un proyecto con el cual continuar a todos aquellos que, como él, se sienten comprometidos con *la* verdad o, como habría dicho a Gottard Günther en una carta de 1954:

> I'm please that [...] you advocate a cautiously [*vorsichtig*] Platonistic point of view. To me a Platonism of this kind (also with respect to mathematical concepts) seems to be obvious and its rejection to border on feeble-mindedness [*am Schwachsinn zu grenzen*]. (Gödel, 1954: 309)

Alicia cayó encima de un montón de ramas y hojas secas al concluir su caida a través de la madriguera del conejo. Apenas se estaba poniendo de pie cuando vio que, a lo lejos, el Conejo Blanco se alejaba, muy presuroso. Obviamente, Alicia le siguió, cruzando la sala larga iluminada por lámparas que colgaban del techo, con puertas alrededor de toda ella. Alicia intentó abrir cada una de las puertas, sin éxito, cuando descubrió una pequeña mesa de tres patas hecha de cristal. Encima, sólo había una pequeñísima llave de oro por lo que, pensó Alicia, de seguro con ella podría abrir alguna de éstas puertas. El problema es que o las cerraduras eran demasiado grandes o la llave era demasiado pequeña, por lo que no pudo abrir ninguna de las puertas. Pero, al realizar una inspección más detallada, Alicia se dio cuenta que, detrás de una cortina, había una puertecita diminuta. Alicia probó con la llavecita de oro y pudo abrirla. La puerta comunicaba con un pasadizo diminuto; Alicia se arrodilló y, al mirar a través de este pasadizo, descubrió el jardín más hermoso que jamás hubiera visto.

¿Cómo podría entrar y atravesar ese pequeño pasadizo? Alicia regresó a la mesita y encontró, ahora, un frasquito con una etiqueta atada a su cuello que decía "BÉBEME". Al no encontrar ninguna senñal que indicara que el contenido del frasquito era veneno, Alicia lo bebió. Inmediatamente, Alicia se hizo diminuta, tan pequeña que, ahora, podía caminar sin problemas a través del pasadizo. Pero cuando llegó a la puerta, se dio cuenta que no traía consigo la llavecita de oro, por lo que regreso a la mesa para recogerla pero, ahora, no podía alcanzarla: era demasiado pequeña para alcanzarla y la mesa muy resbaladiza como para treparla. Después de llorar por un buen rato, Alicia se dio cuenta que, debajo de la mesa, había una cajita diminuta, y dentro de ésta, haía una pequeña tarta que tenía escrita con grosellas la palabra "CÓMEME". Alicia no lo pensó dos veces: si la tarta la hace crecer, podría agarrar la llave, pero si la hacía más pequeña, podría deslizarse por debajo de la puerta. Cualquiera que fuera la opción, Alicia podría entrar en el jardín. Con lo que no contaba Alicia era que crecería tanto que, nuevamente, no podría atravesar la puerta para llegar al jardín. Pero nada de lo que extrañarse porque, como lo dice el autor, "le habían sucedido tantas cosas extraordinarias últimamente, que empezaba a pensar que había muy pocas cosas que fueran realmente imposibles" (Carroll: 2000, 16)[62].

Así como Alicia, el universo conjuntista se nos presenta como aquel hermoso jardín que Alicia viera a través del pasillo, la bella jerarquía acumulativa de conjuntos que Zermelo describió en 1930 y que nos ofrece una estructura del universo de von Neumann V. Sin embargo, gracias a los resultados de Gödel en 1931 sabemos que es imposible demostrar la consistencia de nuestro sistema formal, en este caso, ZFC, dentro del sistema mismo, por lo que el sueño de alcanzar, como Alicia, ese hermoso jardín se nos escapa de las manos. No obstante, tenemos medios para hacernos lo más pequeño que podamos o tan grande como queramos. ¿Cómo es esto posible? El primer método, nuestro frasquito con la etiqueta "BÉBEME" en su cuello, lo exploramos en el segundo capítulo: la creación de la jerarquía de conjuntos constructibles de Gödel, L. Al tomar como su "espina dorsal" a los ordinales, L contiene dentro de sí sólo aquellos conjuntos que son estrictamente necesarios, es decir, aquellos conjuntos que sean definibles a partir de conjuntos que, en un estadio anterior, han sido construidos. De ahí que, el universo de los conjuntos constructibles de Gödel no sólo sea el model más pequeño posible, sino que era el único universo no trivial que había

[62]"For, you see, so many out-of-the-way things had happened lately, that Alice had begun to think that very few things indeed were really impossible".

sido introducido hasta ese momento y con ello,, Gödel introdujo la construcción de modelos internos como una técnica para la construcción de modelos de ZFC o sistemas afines.Ahora somos tan pequeños que, todo lo que podemos percibir de nuestro jardín es aquello que cabe en nuestras manos: en L el infinito, paradójicamente, está muy limitado.

Es en este momento en la historia de la teoría de conjuntos en el que Paul J. Cohen, como Alicia, encontró la cajita diminuta que contenía la tarta con la palabra "CÓMEME" escrita con grosellas que nos permitirá hacernos tan grandes como lo queramos. En el caso de la teoría de conjuntos ¿cómo podemos hacer más grande el modelo creado por Gödel? Si partimos del supuesto que ZFC es consistente y que, por lo tanto, tiene un modelo, no sólo L es un modelo de ZFC sino que no podemos demostrar en ZFC que exista algún número real que no sea construible, esto es, la fórmula *existe un número real x tal que, para todo ordinal* α, *x no pertenece a* L_α no es demostrable en ZFC; para poder extender el modelo de Gödel necesitamos añadirle, cuidadosamente, números reales. En el caso de la CH, si queremos construir un modelo donde ésta no vala, éste debe contener muchos números reales que no sean construibles. Para continuar, debemos introducir el teorema de Löwenheim-Skolem.

Teorema de Löwenheim - Skolem: *Si una teoría formulada en un lenguaje numerable de primer orden tiene un modelo, entonces tiene un modelo numerable*[63].

Debido a que ZFC es una teoría de este tipo ésta tendrá un modelo numerable al que llamaremos *M*. Debido a que existe una cantidad no numerable de números reales, esto debido a Cantor, existen muchos números reales que no están en *M*. Si partimos del supuesto que *M* es de la forma L_α, donde α es un ordinal infinito y numerable, es decir, no sólo los números naturales y las sucesiones finitas de números naturales pertenecen a *M*, sino también los números racionales. Debido a lo anterior, si queremos añadir un nuevo número real a *M*, éste debe ser un irracional. Pero no podemos añadir cualquier tipo de número, sino números reales que no tengan propiedades, o en el léxico de Cohen, que sean *genéricos*, esto es, un *real de Cohen* debe evitar decir algo no trivial acerca del modelo. Esta es la idea detrás del *forcing*, la técnica con la que Cohen demostró la contraparte al resultado de Gödel de 1938: si añadimos como axioma a ZF la negación de CH, el modelo resultante sigue siendo consistente.

Tenemos entonces dos teoremas:

Gödel - 1938: *Si asumimos la consistencia de ZFC, ZFC + CH y ZFC + GCH son consistentes.*

Cohen - 1963: *Si asumimos la consistencia de ZFC, ZFC +* $\neg$ *CH y ZFC +* $\neg$ *GCH son consistentes.*[64]

El primero gracias al método de los modelos internos y el segundo con lo que Koellner llama, "modelos externos", es decir, la construcción de un modelo a través de la técnica de *forcing*. Ambas técnicas no sólo nos dieron estos resultados, sino que, como vimos anteriormente en el caso de los modelos internos, son los principales caminos de investigación donde se está

[63] *Cfr.* Bagaria: 1999, 548
[64] *Cfr.* Koellner: 2013.

librando la “batalla” por el futuro de la teoría de conjuntos, como nos diría Kennedy:

> Gödel and Cohen bequeathed to set theorists the only two model construction methods they have. Gödel's method shows how to “shrink” the set-theoretic universe to obtain a concrete and comprehensible structure. Cohen's method allows us to expand the set-theoretic universe un accordance with the intuition that the set of real numbers is very large. Building on this solid foundation, future generations of set theorists have been able to make spectacular advances. (2011)

El programa de modelos internos busca construir modelos que conserven la estructura del universo de los conjuntos constructibles de Gödel pero que puedan “agrandarse˝ lo suficiente como para permitir que modelos con axiomas como Grandes cardinales añadidos a éste, sean consistentes. Al tener al universo de los conjuntos constructibles de Gödel como nuestro “modelo a emular˝ se dice que éste es *canónico.* Ahora bien, quizá la pregunta metamatemática más importante dentro de la teoría de conjuntos contemporánea sea ¿es el universo matemático *como* el universo de Gödel o es, más bien, distinto a éste? Hugh Woodin, junto con su proyecto del axioma V = *Ultimate L* es quizá el matemático más reconocido trabajando dentro de este programa iniciado por Gödel y de quien, se espera, tener una solución al problema de CH.

Por otro lado, el programa de modelos externos o de *forcing* busca abarcar cada vez más y más del universo inexplorado de las matemáticas, construyendo modelos cada vez más y más grandes: mientras el programa de modelos internos busca irse expandiendo a partir de la estructura elegante proporcionada por el universo de los conjuntos constructibles de Gödel, el programa de modelos externos está impulsado por la idea de que el universo matemático es lo más rico posible, teniendo en el axioma *Martin's maximum* el principal contendiente para el axioma V = *Ultimate L* en la búsqueda de una estructura que de cuenta del universo matemático.

Así, los programas de Gödel y Cohen no sólo tienen una faceta técnica, sino que nos permiten acercarnos de maneras distintas al fenómeno de la verdad dentro de la teoría de conjuntos. Como vimos anteriormente, Gödel aboga por mantener la esperanza respecto a una solución definitiva para CH: lo único que podemos sacar de la independencia de proposiciones matemáticas es que ZFC es insuficiente para responder a éstas, por lo que nuestro objetivo debe ser el descubrir nuevos axiomas que permitan responderlas. Por su parte, Cohen parece indicarnos que existen muchas teorías de conjuntos posibles, unas donde CH es consistente con ZF, otras donde éste no es el caso, y todas merecen nuestra consideración. A diferencia de Gödel, para Cohen, esto es lo único que podemos decir respecto al problema.

Como intentamos mostrar a lo largo de la presente investigación, creemos que la constante afirmación por parte de Gödel de esta esperanza por obtener respuestas definitivas, viene de la mano de su realismo matemático, encontrando en el axioma de constructibilidad $V = L$ una afirmación a la pregunta ¿es el universo matemático *como* el universo de Gödel?[65]

“Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros”[66] 92 años han pasado desde que Hilbert dijera está frase durante su conferencia en Münster en el marco

[65]Sería, por su parte, interesante investigar si una posible lectura en clave metafísica puede obtenerse del *forcing* como herramienta, una posible vinculación con el formalismo matemático, pero tales propósitos exceden los límites de la presente investigación.

[66]“Auf dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können”, Hilbert (1926).

del encuentro de la Sociedad matemática de Westfalia. 92 años en los que, a pesar de los esfuerzos por diversos proyectos fundacionales en matemáticas como la teoría de categorías o, más recientemente, la teoría homotópica de tipos, la teoría de conjuntos sigue siendo el principal entremado conceptual para poder entender el universo de las matemáticas. Y es que, con la introducción del *forcing* por parte de Paul J. Cohen al arsenal técnico del que disponen los matemáticos, pareciera como si la teoría axiomática de conjuntos se revitalizara por completo y adquiriera todo un nuevo poder expresivo que permitió el abarcar nuevas regiones nunca antes exploradas. Quizá Hilbert tenga razón y nadie nos pueda expulsar de ese paraíso, como nadie podrá expulsar a Alicia de su jardín.

Índice de figuras

Bibliografía

BAGARIA, Joan (1999) “Paul J. Cohen y la técnica del forcing” en *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 2, núm. 3, pp. 543 - 553.

__________ (2013) *Models of Set Theory: A Graduate Course.* Barcelona: ICREA.

BALAGUER, Mark (1998) *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics.* New York: Oxford University Press.

__________ (2008) “Mathematical Platonism” en GOLD, B. y SIMONS, R., eds., *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy.* Washington DC: Mathematical Association of America, pp. 179 - 204.

__________ (2016) “Platonism in Metaphysics” en ZALTA, E., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2016 Edition), https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/platonism/

BENACERRAF, Paul (1965) “What Numbers Could not Be” en *The Philosophical Review*, Vol. 74, Núm. 1, pp. 47 - 73.

__________ (1973) “Mathematical Truth” en *The Journal of Philosophy*, Vol. 70, Núm. 19, pp. 661 - 679.

BENACERRAF, Paul y PUTNAM, Hilary, eds. (1964) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings.* New York: Prentice-Hall Inc.

BERTO, Francesco (2009) *There’s Something About Gödel.* Oxford: Wiley-Blackwell.

BOOLOS, George, BURGESS, John y JEFFREY, Richard (2007) *Computability and Logic.* New York: Cambridge University Press.

BURGESS, John (2014) “Intuitions of Three Kinds in Gödel’s Views on the Continuum” en KENNEDY, J., ed., *Interpreting Gödel: Critical Essays.* Cambridge: Cambridge University Press.

COHEN, Paul J. (1966) *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* New York: Dover Publications Inc.

COLYVAN, Mark. (2015) “Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics” en ZALTA, E., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2015 Edition), https://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/mathphil-indis/

COQUAND, Thierry (2014) “Type Theory” en ZALTA, E., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2015 Edition) https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/type-theory/

DAUBEN, Joseph (1990) *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* New Jersey: Princeton University Press.

DAVIS, Martin (2005) "What Did Gödel Believe and When Did He Believe it?" en *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 11, Núm. 2, pp. 194 - 206.

DEDEKIND, Richard (2015) *Essays on the Theory of Numbers.* New York: Dover Publications Inc.

FEFERMAN, Solomon (1998) *In the Light of Logic.* New York: Oxford University Press.

FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., KLEENE, Stephen, MOORE, Gregory H., SOLOVAY, Robert M. y HEIJENOORT, van Jean, eds. (1986) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 1. New York: Oxford University Press.

__________ (1990) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 2. New York: Oxford University Press.

FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., GOLDFARB, Warren, PARSONS, Charles y SOLOVAY, Robert M., eds. (1995) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 3. New York: Oxford University Press.

FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., GOLDFARB, Warren, PARSONS, Charles y SIEG, Wilfried, eds. (2003) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 4. New York: Oxford University Press.

__________ (2003) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 5. New York: Oxford University Press.

FERREIRÓS, José, ed. (2000) *Riemanniana selecta.* Madrid: CSIC.

__________ (2007) *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics.* Basel: Birkhäuser Verlag AG.

FLOYD, Juliet y KANAMORI, Akihiro (2016) "Gödel vis-à-vis Russell: Logic and Set Theory to Philosophy" en CROCCO, Gabriella, ENGELEN, Eva-Maria, eds., *Kurt Gödel: Philosopher - Scientist.* Aix-en-Provence: Publications de l'Université de Provence, pp. 243 - 326.

FOLINA, Janet (2014) "Gödel on How to Have your Mathematics and Know it Too" en KENNEDY, J., ed., *Interpreting Gödel: Critical Essays.* Cambridge: Cambridge University Press.

FOSTER WALLACE, David (2010) *Everything and More: A Compact History of Infinity.* New York: W. W. Norton.

FRAENKEL, Abraham A. (1976) *Teoría de los conjuntos y lógica.* Ciudad de México: UNAM - Instituto de investigaciones filosóficas.

FRANZÉN, Torkel (2005) *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse.* Massachussetts: A K Peters Ltd.

FREGE, Gottlob (1980) *The Foundations of Arithmetic.* Illinois: Northwestern University Press.

GARRIDO, Manuel (2009) “El teorema de Gödel: Un análisis filosófico” en Gödel, Kurt, *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines.* Oviedo: KRK ediciones.

GINAMMI, Michele (2016) “The Applicability of Mathematics and the Indispensability Arguments” en *Revue de la Sociëté de la Philosophie des Sciences*, Vol. 3, Nům. 1, pp. 59 - 68.

GÖDEL, Kurt (1931) “On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems I” en FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., KLEENE, Stephen, MOORE, Gregory H., SOLOVAY, Robert M. y HEIJENOORT, van Jean, eds. (1986) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 1. New York: Oxford University Press, pp. 144 - 195.

__________ (1933) “The Present Situation in the Foundations of Mathematics” en FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., GOLDFARB, Warren, PARSONS, Charles y SOLOVAY, Robert M., eds. (1995) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 3. New York: Oxford University Press, pp. 45 - 53.

__________ (1938) “The Consistency of the Axiom of Choice And of the Generalized Continuum Hypothesis” en FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., KLEENE, Stephen, MOORE, Gregory H., SOLOVAY, Robert M. y HEIJENOORT, van Jean, eds. (1990) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 2. New York: Oxford University Press, pp. 26 - 32.

__________ (1944) “Russell’s Mathematical Logic” en FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., KLEENE, Stephen, MOORE, Gregory H., SOLOVAY, Robert M. y HEIJENOORT, van Jean, eds. (1990) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 2. New York: Oxford University Press, pp. 119 - 141.

__________ (1947) “What is Cantor’s Continuum Problem?” en FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., KLEENE, Stephen, MOORE, Gregory H., SOLOVAY, Robert M. y HEIJENOORT, van Jean, eds. (1990) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 2. New York: Oxford University Press, pp. 176 - 187.

__________ (1951) “Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications” en FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., GOLDFARB, Warren, PARSONS, Charles y SOLOVAY, Robert M., eds. (1995) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 3. New York: Oxford University Press, pp. 304 - 323.

__________ (1954) “Letter to Gottard Günther, June, 30” en FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., GOLDFARB, Warren, PARSONS, Charles y SIEG, Wilfried, eds. (2003) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 4. New York: Oxford University Press, pp. 476 - 535.

__________ (1964) “What is Cantor’s Continuum Problem?” en FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., KLEENE, Stephen, MOORE, Gregory H., SOLOVAY, Robert M. y HEI-

JENOORT, van Jean, eds. (1990) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 2. New York: Oxford University Press, pp. 254 - 270.

GOLDSTEIN, Rebecca (2005) *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel.* New York: W. W. Norton.

GUTIÉRREZ, Cristian Alejandro (2015) *¿Es la hipótesis del continuo una proposición absolutamente indecidible? Un estudio filosófico* (Tesis doctoral no publicada). Ciudad de México: UNAM.

HART, H. D. (1991) "Benacerraf's Dilemma" en *Crítica Revista Hispanoamericana de filosofía*, Vol. 23, Núm. 68, pp. 87 - 104.

HAUSER, Kai (2006) "Gödel's Program Revisited Part I: The Turn to Phenomenology" en *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 12, Núm. 4, pp. 529 - 590.

HUSSERL, Edmund (1913) *Ideas Pertaining to a Pure Phenomenology and to a Phenomenological Philosophy.* The Hague: Nijhoff.

JECH, Thomas (2003) *Set Theory: The Third Millenium Edition, revised and Expanded.* Berlin: Springer Verlag.

KENNEDY, Juliette (2011) "Can the Continuum Hypothesis be Solved?" Recuperado de https://www.ias.edu/ideas/2011/kennedy-continuum-hypothesis

__________ ed., (2014) *Interpreting Gödel: Critical Essays.* Cambridge: Cambridge University Press.

KENNEDY, Juliette y VAN ATTEN, Mark (2003) "On the Philosophical Development of Kurt Gödel" en *Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 9, Núm. 4, pp. 425 - 476.

__________ (2009) "Gödel's Modernism: On Set Theoretic Incompleteness, Revisited" en LINDSTRÖM, Sten, PALMGREN, E., SEGERBERG, K. y STOLTENBERG-HANSEN, V., eds., *Logicism, Intuitionism and Formalism: What has become of them?.* Berlin: Springer-Verlag, pp. 303 - 356.

KHARAZISHVILI, Alexander (2016) "Cantor's Diagonalization Method" Recuperado de http://inference-review.com/article/cantors-diagonalization-method

KLEENE, Stephen (1987) "Kurt Gödel" en *Biographical Memoirs*, Vol. 56, Washington DC: National Academy of Sciences of the United States of America, pp. 135 - 180.

KLIMA, Gyula (2013) "The Medieval Problem of Universals" en ZALTA, E., ed. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2013 Edition) https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/universals-medieval/

KOELLNER, Peter (2013) "The Continuum Hypothesis" en ZALTA, E., ed. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2013 Edition) https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/continuum-hypothesis/

KREISEL, G. (1980) "Kurt Gödel. 28 April 1906 - 14 January 1978" en *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, Vol. 26, pp. 148 - 224.

KUNEN, Kenneth (2013) *Set Theory.* London: College Publishing Ltd.

LAVINE, Shaughan (2005) *Comprendiendo el infinito.* Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.

LINNEBO, Øystein (2013) "Platonism in the Philosophy of Mathematics" en ZALTA, E., ed. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition) https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/platonism-mathematics/

LIPTON, Richard (2009) "Cantor's Non-Diagonal Proof". Recuperado de https://rjlipton.wordpress.com/2009/04/18/cantors-non-diagonal-proof/

MADDY, Penelope (1992) "Indispensability and Practice" en *The Journal of Philosophy*, Vol. 89, Núm. 6, pp. 275 - 289.

__________ (1993) "Does V = L" en *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 58, Núm. 1, pp. 15 - 41.

__________ (2011) *Defending the Axioms.* New York: Oxford University Press.

MARTIN, D. A. (2005) "Gödel's Conceptual Realism" en *Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 11, Núm. 2, pp. 207 - 224.

NAGEL, Ernst y NEWMAN, James R. (2008) *El teorema de Gödel.* Madrid: Tecnos.

PARSONS, Charles (1990) "Introductory note to 1944" en FEFERMAN, Solomon, DAWSON, John W., KLEENE, Stephen, MOORE, Gregory H., SOLOVAY, Robert M. y HEIJENOORT, van Jean, eds. (1986) *Kurt Gödel Collected Works*, Vol. 2. New York: Oxford University Press.

PENROSE, Roger (1989) *The Emperor's New Mind.* London: Oxford University Press.

__________ (1994) *Shadows of the Mind.* New York: Oxford University Press.

PUTNAM, Hilary (1979) *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers*, Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press.

QUINE, Willard V. O. (1953) *From a Logical Point of View.* Cambridge: Harvard University Press.

__________ (1976) *The Ways of Paradox and Other Essays.* Cambridge: Harvard University Press.

__________ (1981) *Theories and Things.* Cambridge: Harvard University Press.

RODRÍGUEZ CONSUEGRA, Francisco (1991) "Números, objetos y estructuras" en *Crítica: Revista Hispanoamericana de filosofía*, Vol. 23, Núm. 68, pp. 7 - 86.

RUCKER, Rudy (2012) "Memories of Kurt Gödel". Recuperado de
http://www.rudyrucker.com/blog/2012/08/01/memories-of-kurt-godel/

SHAPIRO, Stewart (1997) *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology.* New York: Oxford University Press.

SMITH, Peter (2007) *An Introduction to Gödel's Theorems.* Cambridge: Cambridge University Press.

__________ (2014) *Gödel Without (Too Many) Tears* (Draft).

SMULLYAN, Raymond (1992) *Gödel's Incompleteness Theorems.* New York: Oxford University Press.

TAIT, William (1986) "Truth and Proof: The Platonism of Mathematics" en *Synthese*, Vol. 69, Núm. 3, pp. 341 - 370.

TILES, Mary (2012) *The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantor's Paradise.* New York: Dover Publications Inc.

WANG, Hao (1974) *From Mathematics to Philosophy.* London: Routledge and Kegan Paul.

__________ (1987) *Reflections on Kurt Gödel.* Cambridge: MIT Press.

__________ (1996) *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy.* Cambridge: MIT Press.

ZALAMEA, Fernando (1996) "Kurt Gödel: Análisis filosófico y lógica matemática" en *Mathesis*, Vol. 12, Núm. , pp. 347 - 374.