UNIVERSIDAD VERACRUZANA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

El Rango Aritmético

T E S I S

que para obtener el título de

MAESTRA EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

Miriam Rodríguez Olivarez

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Luis Alfredo Dupont García
Dr. Armando Sánchez Nungaray

Junio 2015 Xalapa-Enriquez, Veracruz

Agradecimientos

Aquí se escribirá una dedicatoria

Índice general

Resumen

En el trabajo se desarrollan herramientas matemáticas para encontrar el valor de un invariante llamado *rango aritmético (ara)*, geométricamente se interpreta como el mínimo número de hipersuperficies que definen a una variedad y algebraicamente como el mínimo número de polinomios necesarios para generar al radical de un ideal dado del anillo de polinomios en n variables. Cabe mencionar que los métodos usados fueron inspirados por un procedimiento publicado por Schmitt y Vogel, [22].

El valor ara es muy difícil de encontrar, por lo cual sólo se dan cotas inferiores y superiores. Una cota inferior es la dimensión proyectiva ($projdim$) definida por medio de una resolución libre minimal, en nuestro caso, una resolución de Lyubeznik, y como una cota superior se encuentra el mínimo número de generadores del ideal dado (μ). La forma de proceder para encontrar el ara es acotarla superiormente por medio de un número cuyo valor sea igual a la dimensión proyectiva, es decir $projdim \leq ara \leq projdim$.

El trabajo se desarrolla de la siguiente manera:

1. *Introducción:* Se da una breve reseña de como surgió el rango aritmético y los valores que lo acotan. Todo esto con la finalidad de enfatizar la importancia del ara.

2. *Álgebra conmutativa:* Aquí se dan las definiciones de álgebra conmutativa básicas necesarias para comprender y justificar cada elemento a usar en el trabajo.

3. *Sobre el número de ecuaciones que definen ciertas variedades:* Se acota al ara superiormente por medio de unos conjuntos de un ideal dado. Los conjuntos se formarán tomando combinaciones de los monomios que generan al ideal. Además, se mostrarán ejemplos donde este método funciona y ejemplos donde el método no funciona.

4. *Ideales cuyo radical es un ideal monomial:* Se usa un caso particular del método mostrado en el capítulo anterior, el cual forma los conjuntos no necesariamente con elementos del ideal dado.

5. *Apéndice:* Se ofrece de forma detallada la construcción de la resolución libre de Lyubeznik con los símbolos admisibles. Además se presentan las definiciones de los conceptos que se mencionan en la introducción.

Introducción

Consideremos el anillo de polinomios en n variables sobre un campo K; $R = K[x_1, ..., x_n]$. Definimos al conjunto

$$K^n = \{(a_1, ..., a_n) \big| a_1, ..., a_n \in K\}$$

como el *espacio afín n-dimensional sobre K.*

El conjunto de todas las soluciones $(a_1, ..., a_n) \in K^n$ de un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1, ..., x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, ..., x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_s(x_1, ..., x_n) & = & 0 \end{array}$$

es conocido como la *variedad afín* definida por $f_1, ..., f_s$ y es denotada por $V(f_1, ..., f_s)$. Un subconjunto $V \subset K^n$ es una variedad afín si $V = V(f_1, ..., f_s)$ para alguna familia de polinomios $f_1, \ldots, f_s \in K[x_1, ..., x_n]$.

Una variedad afín $V \subset K^n$ puede describirse por muchos sistemas de ecuaciones. Si $g = p_1 f_1 + \cdots + p_s f_s$, donde $p_i \in K[x_1, ..., x_n]$ son polinomios cualesquiera, entonces $g(a_1, ..., a_n) = 0$ en cada $(a_1, ..., a_n) \in V(f_1, ..., f_s)$. Así, para cualquier conjunto de ecuaciones dadas que definen a una variedad, podemos siempre producir infinitas sumas de polinomios que también se vuelven cero en la variedad.

Sea una variedad $V \subset K^n$. Se define el *ideal de la variedad* como:

$$I(V) = \{f \in K[x_1, ..., x_n] \big| f(a_1, ..., a_n) = 0 \text{ para toda } (a_1, ..., a_n) \in V\}$$

es decir, el ideal consiste en los polinomios que se hacen cero en V y no sólo los que generan a la variedad.

Por lo anterior se genera una asociación

$$\begin{array}{ccc} \text{Variedad afín} & & \text{Ideal} \\ V & \longrightarrow & I(V) \end{array}$$

De igual forma se puede dar un ideal en el anillo de polinomios y asociarle una variedad como sigue:

Sea I un ideal en $K[x_1, ..., x_n]$. Se define la variedad asociada al ideal como

$$V(I) = \{\mathbf{x} \in K^n \big| f(\mathbf{x}) = 0 \text{ para toda } f \in I\}.$$

Por lo tanto, tenemos otra asociación:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ideal} & & \text{Variedad afín} \\ I & \longrightarrow & V(I) \end{array}$$

El Teorema de la Base de Hilbert nos asegura que el ideal en $K[x_1, ..., x_n]$ es finitamente generado, por lo que se puede asegurar que la variedad $V(I)$ (variedad afín) está generada por una cantidad finita de polinomios $f_1, ..., f_s \in I$ tal que $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle$ donde $V(I)$ es el conjunto de las raíces en común de estos f_i.

El problema de la asociación *ideal-variedad* es que no es uno a uno, pues el Teorema de los ceros de Hilbert [20] nos dice que dos ideales distintos pueden definir a la misma variedad, y es porque un polinomio y su potencia se vuelven cero en el mismo conjunto. Esto quiere decir que cualquier ideal dado $J \neq I$ con $\sqrt{J} = \sqrt{I}$, cumpliría que $V(I) = V(J)$. Ejemplo de esto es

$$V(\langle x \rangle) = V(\langle x^2 \rangle) = \{0\}.$$

Esto sugiere que existe una correspondencia uno a uno entre la variedad afín y el radical del ideal. Por lo tanto, la correspondencia *ideal-variedad* que es uno a uno está dada por:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ideal radical} & & \text{Variedades afín} \\ I & \longleftrightarrow & V(I) \end{array}$$

La cuestión ahora es saber *cuál es el menor número de polinomios en el anillo necesarios para definir a la variedad*. Esto nos lleva a definir el rango aritmético.

Sea R un anillo conmutativo Noetheriano con identidad. Decimos que $r_1, ..., r_m \in R$ generan a un ideal $I \subset R$ hasta radical si

$$\sqrt{\langle r_1, ..., r_m \rangle} = \sqrt{I}$$

El menor natural m con esta propiedad es llamado el *rango aritmético de* I, y se denota por $ara(I)$.

El problema de determinar el mínimo número de ecuaciones necesarias para definir la variedad asociada a un ideal monomial es abierto en general; como el valor $ara(I)$ es difícil de encontrar podemos encontrar cotas, estas se darán a continuación.

Si $\mu(I)$ es el mínimo número de generadores para I, entonces claramente se tiene que

$$ara(I) \leq \mu(I).$$

Además, si $\tau(I)$ es la altura máxima de los ideales primos minimales de I, se tiene como una consecuencia del Teorema de Altura de Krull [20, Teo. 15.2] que:

$$\tau(I) \leq ara(I)$$

En particular si $ht(I)$ es la altura de I

$$ht(I) \leq \tau(I) \leq ara(I).$$

Cuando $ht(I) = ara(I)$, se dice que I es una *intersección completa*. En este caso se tiene la igualdad $ht(I) = \tau(I) = ara(I)$. Un ideal I se dice que es una *intersección casi completa* cuando $\mu(I) = ht(I) + 1$.

Un ideal $I \subset R$ es *no mezclado* o *puro-dimensional* si $ht(I) = ht(P)$ para toda $P \in Ass_R(R/I)$, es decir, todos los primos minimales de I tienen la misma altura.

El rango aritmético fue estudiado inicialmente por Schenzel y Vogel [21], Schmitt y Vogel [22] y Lyubeznik [17]. Cotas superiores para el rango aritmético también son obtenidas por Barile, construyéndolas sobre el trabajo de Schmitt y Vogel. El rango aritmético de todo ideal en el anillo de polinomios $R = K[x_1, ..., x_n]$ es a lo más n [9], pues podría suceder que los generadores sean más de n.

Geometría algebraica

Sea $R = K[x_1, ..., x_n]$ un anillo de polinomios sobre un campo algebraicamente cerrado K y sea I un ideal monomial de R. Considerando la variedad $V(I)$ definido en el espacio afín K^n (o el espacio proyectivo P_K^{n-1}, si I es homogéneo y diferente del ideal maximal irrelevante) definida por la nulidad de los polinomios en I. Por el teorema de la base de Hilbert la variedad es finitamente generada. Por el teorema de los ceros de Hilbert $I(V(I)) = \sqrt{\langle f_1, ..., f_s \rangle}$. Si s es mínimo con respecto a esta propiedad, entonces $codim(V(I)) \leq s$. Si se tiene la desigualdad, $V(I)$ se llama una *intersección completa* vía $f_1, ..., f_s$. Además, se puede escribir a la variedad como:

$$V(I) = V(\langle f_1 \rangle) \cap \cdots \cap V(\langle f_s \rangle),$$

es decir, como intersección de hipersuperficies, lo cual simplifica la forma de trabajar con la variedad. Por lo que determinar el mínimo número de ecuaciones que definen la variedad dada (ara), es un problema difícil en geometría algebraica.

Una mejor cota inferior para el $ara(I)$ está dada por la dimensión de la cohomología local, donde Lyubeznik probó que para cualquier ideal monomial libre de cuadrado, la dimensión cohomológica coincide con la dimensión proyectiva.

Relación con Dimensión Cohomológica y Dimensión Proyectiva

Por *dimensión proyectiva* ($projdim(R/I)$) de I entendemos la longitud de una resolución libre minimal de R/I. Sea $H_I^i(R)$ el i-ésimo módulo de cohomología local de R con respecto a I. La *dimensión cohomológica* de I se define como:

$$cd(I) = max\{i \mid H_I^i(R) \neq 0\},$$

donde R es el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$. Por [10] y [13] para todos los ideales I en un anillo conmutativo Noetheriano se cumple:

$$cd(I) \leq ara(I)$$

Por [18], para todos los ideales monomiales I libres de cuadrado se cumple $projdim(R/I) = cd(I)$. Por lo tanto

$$projdim(R/I) = cd(I) \leq ara(I)$$

En [15] los autores mostraron que la igualdad $ara(I) = projdim(R/I)$ se cumple para ideales monomiales libres de cuadrado con $\mu(I) - ht(I) \leq 2$. También probaron que la igualdad se cumple para $\mu(I) - projdim(R/I) \leq 1$.

En general $projdim(R/I) \neq ara(I)$. Un ejemplo de esto lo encontró Yan [25]. Para un ideal I mostró que $ara(I) = 4 > 3 = projdim(R/I)$ si $char(K) \neq 2$ donde I es el ideal de Stanley-Reisner de la triangulación del plano proyectivo con 6 vértices.

Todos los cálculos que se conocen hasta ahora del rango aritmético están en el contexto de ideales monomiales libres de cuadrado. Por lo que, determinar el rango aritmético es aún un gran problema abierto.

Capítulo 1

Álgebra conmutativa

En este capítulo se desarrolla un poco de teoría de ideales monomiales. Después se estudian los módulos graduados. Además, se expone al álgebra exterior y las resoluciones (específicamente resoluciones proyectivas) para luego conjuntar en la última sección donde presentamos la resolución de Lyubeznik.

Para empezar, revisaremos a los ideales monomiales, esto es, su forma y algunas propiedades. Además, el comportamiento de los generadores monomiales.

1.1. Ideales monomiales

Definición 1.1.1. Un *monomio* en $R = K[x_1, ..., x_n]$ con K un campo, es un producto

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

con los α_i enteros no negativos. Para abreviar se usa la notación x^α con $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ un vector de exponentes en el monomio. El *grado total de un monomio x^α, $deg(x^\alpha)$* es la suma $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Llamamos $\mathrm{Mon}(R)$ al conjunto de monomios de R. Cualquier polinomio en R tiene una única combinación lineal que se escribe de manera única como combinación lineal de monomios:

$$f = \sum_{u \in Mon(R)} a_u u \quad \text{con } a_u \in K$$

Definición 1.1.2. Se define el soporte de un polinomio como el conjunto

$$supp(f) = \{u \in Mon(R) |\ a_u \neq 0\}.$$

Definición 1.1.3. Un ideal $I \subset R$ es llamado *ideal monomial* si es generado por monomios.

Para $i \in \mathbb{N}$ denotamos por R_i al K-espacio vectorial generado por todos los monomios de grado i. En particular, $R_0 = K$. Un polinomio $p \in R$ es llamado *homogéneo* si $p \in R_i$ para algún i, en este caso decimos que $deg(p) = i$. Las siguientes dos propiedades son equivalentes:

1. $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$

2. $deg(pq) = deg(p) + deg(q)$ para cualquiera dos elementos homogéneos $p, q \in R$

La equivalencia es inmediata por las propiedades de los polinomios que ya conocemos.

Todo polinomio $f \in R$ puede escribirse de forma única como una suma finita, es decir $f = \sum_i f_i$ tal que $f_i \in R_i$. En este caso a f_i se le llama *componente homogéneo de f de grado i*. Entonces tenemos una descomposición en suma directa $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$ de R como un K-espacio vectorial tal que $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Lema 1.1.4. *Un ideal I de R lo llamamos* homogéneo o graduado *si satisface una de las condiciones siguientes:*

1. *Si $f \in I$, entonces toda componente homogénea de f está en I.*

2. *$I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} I_i$, donde $I_i = R_i \cap I$.*

3. *Si $\tilde{I}$ es el ideal generado por todos los elementos homogéneos de I, entonces $\tilde{I} = I$.*

4. *I tiene un conjunto homogéneo de generadores.*

Demostración. La prueba puede verse en [23, Prop. 2.8.2] $\square$

Los ideales monomiales pueden caracterizarse como:

Teorema 1.1.5. *Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de monomios que pertenecen a I. Entonces $\mathcal{N}$ es una K-base de I.*

Demostración. Los elementos de $\mathcal{N}$ son linealmente independientes por ser subconjunto de $Mon(R)$. Entonces se demostrará que para $f \in I$ un polinomio arbitrario se tiene que $supp(f) \subset \mathcal{N}$, es decir, $\mathcal{N}$ es un conjunto de generadores del K-espacio vectorial I.

Sea $f \in I$ un polinomio arbitrario. Existen monomios $u_1, ..., u_m \in I$ y polinomios $f_1, ..., f_m \in R$ tal que $f = \sum_{i=1}^{m} f_i u_i$. Entonces $supp(f) \subset \cup_{i=1}^{m} supp(f_i u_i)$.

Como para cada i se tiene $supp(f_i u_i) \subset \mathcal{N}$ y como cada $v \in supp(f_i u_i)$ es de la forma wu_i con $w \in Mon(R)$, se tiene que está en I. Por lo tanto $supp(f) \subset \mathcal{N}$. $\square$

Corolario 1.1.6. *Sea $I \subset R$ un ideal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *I es un ideal monomial;*
2. *Para todo $f \in R$ se tiene: $f \in I$ si y sólo si $supp(f) \subset I$*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2:$ La prueba se tiene por 1.1.5.

$2 \Rightarrow 1:$ Sea $f_1, ..., f_m$ conjunto de generadores de I. Como $supp(f_i) \subset I$ para todo i, se tiene que $\cup_{i=1}^m supp(f_i)$ es un conjunto de generadores de I.

□

Generadores monomiales

El conjunto de monomios que pertenecen a I pueden describirse como:

Proposición 1.1.7. *Sea $\{u_1, ..., u_m\}$ un conjunto de generadores del ideal monomial I. Entonces los monomios v están en I si y sólo si existe un monomio w tal que $v = wu_i$ para algún i.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que $v \in I$. Entonces existen polinomios $f_i \in S$ tal que $v = \sum_{i=1}^m f_i u_i$. Se sigue que $v \in \cup_{i=1}^m supp(f_i u_i)$ y por lo tanto $v \in supp(f_i u_i)$ para algún i. Esto implica que $v = wu_i$ para algún $w \in supp(f_i)$.
$\Leftarrow$ Esta implicación es inmediata. □

Para un ideal graduado, todos los conjuntos minimales de generadores tienen la misma cardinalidad. Para ideales monomiales tenemos lo siguiente:

Proposición 1.1.8. *Cada ideal monomial tiene un único conjunto minimal de generadores monomiales. Es decir, si G denota al conjunto de monomios en I que son minimales con respecto a la divisibilidad, entonces G es el único conjunto minimal de generadores monomiales.*

Demostración. La prueba se hace de forma usual al considerar dos conjuntos minimales. □

Denotamos al conjunto generador minimal como $G(I)$

Definición 1.1.9. Un ideal monomial x^α es llamado *libre de cuadrado* si los componentes de α están en el conjunto $\{0,1\}$. Sea $u = x^\alpha$ un monomio. Fijamos

$$\sqrt{u} = \prod_{i,\alpha \neq 0} x_i$$

Se tiene $\sqrt{u} = u$ si y sólo si u es libre de cuadrado.

Proposición 1.1.10. *Sea I un ideal monomial. Entonces $\{\sqrt{u}|u \in G(I)\}$ es un conjunto de generadores de $\sqrt{I}$.*

Demostración. Queremos probar que $\sqrt{I} = \langle\sqrt{u}|u \in G(I)\rangle$. La inclusión $\supseteq$ es inmediata, entonces se demostrará $\subseteq$. Como $\sqrt(I)$ es un ideal monomial es suficiente mostrar que cada monomio $v \in \sqrt{I}$ es un múltiplo de algún $\sqrt{u}$ con $u \in G(I)$. De hecho, si $v \in \sqrt{I}$ entonces $v^k \in I$ para algún $k \geq 0$, y por lo tanto $v^k = wu$ para algún $u \in G(I)$ y algún monomio w. □

Definición 1.1.11. Un ideal I es llamado *ideal monomial libre de cuadrado* si I puede generarse por monomios libres de cuadrado.

Como consecuencia se tiene:

Corolario 1.1.12. *Un ideal monomial I es un ideal radical, es decir, $I = \sqrt{I}$, si y sólo si I es un ideal monomial libre de cuadrado.*

Como se sabe, una presentación del ideal I es de la forma $I = \cap_{i=1}^{m} Q_i$. Es llamado irredundante si ninguno de los ideales Q_i puede omitirse de la presentación.

Teorema 1.1.13. *Sea $I \subset R$ un ideal monomial. Entonces $I = \cap_{i=1}^{m} Q_i$, con cada Q_i de la forma $(x_{i_1}^{\alpha_{i_1}}, ..., x_{i_k}^{\alpha_{i_k}})$. Además la presentación es única.*

Demostración. La prueba puede revisarse en [11]. □

Corolario 1.1.14. *Un ideal monomial es irreducible si y sólo si es de la forma*

$$Q = (x_{i_1}^{\alpha_{i_1}}, ..., x_{i_k}^{\alpha_{i_k}}).$$

Demostración. Para ver la prueba ir a [11] □

Observación 1.1.15. Entonces por 1.1.13 y 1.1.14 se tiene que cada ideal monomial tiene una única presentación como una intersección de ideales monomiales irreducibles.

Observación 1.1.16. Si I es un ideal monomial libre de cuadrado, se tiene que los ideales monomiales irreducibles que aparecen en la intersección de I son todos de la forma $(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$.

Así se tiene:

Corolario 1.1.17. *Un ideal monomial libre de cuadrado es una intersección de ideales monomiales primos.*

Descomposición primaria

Definición 1.1.18. Un ideal P es *primo minimal de* I, si $I \subset P$ y no existe un ideal primo conteniendo a I que esté propiamente contenido en P. Denotamos al conjunto de ideales primos minimales de I por $Min(I)$.

Entonces se tiene lo siguiente:

Lema 1.1.19. *Supongamos que* I *tiene una presentación irreduntante* $I = P_1 \cap \cdots \cap P_m$ *como intersección de ideales primos, entonces* $Min(I) = \{P_1, ..., P_m\}$.

Demostración. Supongamos que P_i no es un ideal primo minimal de I. Entonces existe un ideal P con $I \subset P$, con P propiamente contenido en P_i. Como $P_j R_{P_i} = R_{P_i}$ para $i \neq j$ y como la localización conmuta se tiene que $IR_{P_i} = P_i R_{P_i}$!! lo que contradice al hecho de que PR_{P_i} contiene a IR_{P_i} y está propiamente contenido en $P_i R_{P_i}$.

Por otro lado, si P es un ideal primo conteniendo a I, entonces $P_1 P_2 \cdots P_m \subset P_1 \cap \cdots \cap P_m \subset P$. Entonces uno de los P_i debe contener a P. Por lo tanto es un ideal primo minimal de I, por lo que $P = P_i$ □

Combinando 1.1.17 y 1.1.19 se obtiene:

Corolario 1.1.20. *Sea* $I \subset R$ *un ideal monomial libre de cuadrado. Entonces*

$$I = \bigcap_{P \in Min(I)} P,$$

y cada $P \in Min(I)$ *es un ideal primo monomial.*

1.2. Módulos graduados

En la sección anterior vimos a los ideales graduados pero antes de avanzar a los módulos graduados daremos algunas propiedades de los anillos graduados.

Sean $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ un anillo graduado y $R_+ = \oplus_{n \geq 1} R_n$.

Proposición 1.2.1. *1.* R_0 *es un subanillo de* R *y cada* R_n *es un* R_0*-submódulo de* R.

2. R_+ *es un ideal de* R *y la composición* $R_0 \hookrightarrow R \to R/R_+$ *es un isomorfismo de anillos* $R_0 \cong R/R_+$

Observamos que R_0 es un subanillo de R que hace a R una R_0-álgebra conmutativa. Usualmente se identifica a R_0 con R/R_+.

Definición 1.2.2. Sean R y S anillos graduados. Un *homomorfismo de anillos* $f : R \to S$ se dice *graduado* si $f(R_n) \subset S_n$ para todo n.

Sean R un anillo graduado y M un R-mód. Una *graduación* en M es una descomposición $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ de M como una suma directa de subgrupos M_n tal que $R_m M_n \subseteq M_{m+n}$ para todo m, n. Dicho módulo es llamado *módulo graduado*. Como $R_0 M_n \subseteq M_n$, cada M_n es un R_0-submódulo de M, llamada la *componente homogénea* de M de grado n y los elementos de M_n son llamados *elementos homogéneos* de grado n. Igual que en anillos cada $x \in M$ tiene una única expresión $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ con $x_n \in M$ para toda n. Expresión igualmente llamada *descomposición homogénea* de x y x_n es llamada la *componente homogénea* de x de grado n.

De igual forma para un R-homomorfismo de R-módulos M, N se dice que es *graduado de grado* d si $f(M_n) \subseteq N_{n+d}$ para todo n.

Como caso particular, sea $R = K[x_1, ..., x_n]$ el anillo de polinomios en n variables con K campo. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, entonces $f \in R$ es llamado de *grado homogéneo* $\mathbf{a}$ si f es de la forma $c\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ con $c \in K$. El anillo de polinomios R está obviamente $\mathbb{Z}^n$-graduado con los componentes graduados

$$\mathbf{R_a} = \begin{cases} \mathbf{Kx^a} & \text{si } \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n_+ \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

1.3. Álgebra exterior

Álgebra tensorial

Sea R un anillo conmutativo con identidad y M un R-mód, para cada entero $k \geq 1$ definimos

$$T^k(M) = M \otimes_R M \otimes_R \cdots \otimes_R M \quad (k \text{ factores})$$

y fijamos $T^0(M) = R$. Los elementos de $T^k(M)$ son llamados *k-tensores*. Definimos

$$T(M) = R \oplus T^1(M) \oplus T^2(M) \cdots = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(M).$$

Todo elemento de $T(M)$ es una combinación lineal finita de k-tensores para varios $k \geq 0$. Identificamos a $T^1(M)$ con M, así M es un R-submódulo de $T(M)$.

Teorema 1.3.1. *[8, Teo. 31] Si M es un R-mód sobre el anillo conmutativo R, entonces*

1. *$T(M)$ es una R-álgebra conteniendo a M con multiplicación dada por:*

   $$(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i)(m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j$$

   y extendemos a sumas via leyes de distribución. Con respecto a esta multiplicación se tiene que $T^i(M)T^j(M) \subseteq T^{i+j}(M)$.

2. (Propiedad universal) *Si A es cualquier R-álgebra y φ es un homomorfismo de R-mód entonces existe un único homomorfismo de R-álgebras $\Phi : T(M) \to A$ tal que $\Phi|_M = \varphi$, es decir:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & A \\ & T(M) \arrow[u, dotted, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Definición 1.3.2. El anillo $T(M)$ es llamado el *álgebra tensorial* de M.

Como $T^i(M)T^j(M) \subseteq T^{i+j}(M)$, el álgebra tensorial está graduado naturalmente.

Álgebra Exterior

Definición 1.3.3. El *álgebra exterior* de un R-mód M es el R-álgebra obtenido por tomar el cociente

$$T(M)/A(M)$$

con $A(M) = \langle x \otimes x | x \in M \rangle$. El álgebra exterior $T(M)/A(M)$ es denotada por $\bigwedge(M)$ y $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$ es la imagen natural de $m_1 \otimes \cdots \otimes m_k$ bajo el homomorfismo sobreyectivo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & \bigwedge(M) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_k & \mapsto & m_1 \wedge \cdots \wedge m_k. \end{array}$$

Por [8, Prop.33] el álgebra exterior es graduada con la k-ésima componente homogénea $\bigwedge^k(M) = T^k(M)/A^k(M)$. Podemos identificar a $\bigwedge^0(M)$ con R y $\bigwedge^1(M)$ con M y así consideramos a M como un R-submódulo de la R-álgebra $\bigwedge(M)$. El R-mód $\bigwedge^k(M)$ es llamado la *k-ésima potencia exterior.*

Teorema 1.3.4. *[8, Cap.11 Teo.36] Sea M un R-mód sobre un anillo conmutativo R y sea $\bigwedge(M)$ el álgebra exterior*

1. *La k-ésima potencia exterior de M, $\bigwedge^k(M)$, es igual a $M \otimes \cdots \otimes M$ (k factores) módulo el submódulo generado por todos los elementos de la forma*

$$m_1 \otimes \cdots \otimes m_k \quad \text{donde } m_i = m_j \text{ para algún } i \neq j$$

En particular

$$m_1 \wedge \cdots \wedge m_k = 0 \text{ si } m_i = m_j \text{ para algún } i \neq j$$

2. (Propiedad universal) *Si $\varphi : M \times \cdots \times M \to N$ es una aplicación k-multilineal alternante entonces existe un único homomorfismo de R-mód $\Phi : \bigwedge^k(M) \to N$ tal que $\varphi = \Phi \circ i$ donde:*

$$\begin{array}{ccc} i : M \times \cdots \times M & \longrightarrow & \bigwedge^k(M) \\ (m_1, ..., m_k) & \mapsto & m_1 \wedge \cdots \wedge m_k \end{array}$$

Tenemos para $\bigwedge^k(M)$

1. $m_1 \wedge \cdots \wedge m_i \wedge \cdots \wedge m_j \wedge \cdots \wedge m_k = -m_1 \wedge \cdots \wedge m_j \wedge \cdots \wedge m_i \wedge \cdots \wedge m_k$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, ..., k\}$.

2. $m_1 \wedge \cdots \wedge m_i \wedge \cdots \wedge m_j \wedge \cdots \wedge m_k = 0$ si $m_i = m_j$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, ..., k\}$.

Para finalizar podemos decir que si F es un módulo libre de rango k sobre un anillo conmutativo R. Entonces $\bigwedge^k(F)$ es libre de rango $\binom{k}{l}$. En particular, si $m_1, ..., m_k$ forman una R-base para F entonces los monomios

$$m_{i_1} \wedge \cdots \wedge m_{i_l} \quad \text{con } i_1 < \cdots < i_l$$

están en R y forman una base para $\bigwedge^l(F)$.

1.4. Resoluciones

Denotaremos a X como un R-mód arbitrario. Una *resolución proyectiva* de X es una sucesión exacta

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial} C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

de R-módulos tal que satisface:

1. $C_{-1} = X$

2. $C_n = 0$ para todo $n < -1$

3. C_n es R-mód proyectivo para todo $n \geq 0$

En particular si C_n es un R-mód libre para todo $n \geq 0$ entonces la sucesión C se llama *resolución libre* del módulo X.

Proposición 1.4.1. *[12, Cap. 3, Prop. 1.1] Todo R-mód tiene una resolución libre.*

Proposición 1.4.2. *[12, Cap. 3, Teo. 1.4] Todo R-mód tiene una resolución proyectiva, y dos resoluciones proyectivas del mismo módulo son equivalentes homotópicamente.*

Definición 1.4.3. Para una resolución proyectiva cualquiera

$$C : \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

de un R-mód X, definimos una sucesión descendente

$$\widetilde{C} : \qquad \cdots \longrightarrow \widetilde{C}_{n+1} \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{n+1}} \widetilde{C}_n \xrightarrow{\widetilde{\partial}_n} \widetilde{C}_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

de R-módulos tomando

$$\tilde{C}_n = \begin{cases} C_n & \text{si } n \neq -1 \\ 0 & \text{si } n = -1 \end{cases} \qquad \tilde{\partial}_n = \begin{cases} \partial_n & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Diremos que la sucesión $\widetilde{C}$ es una *resolución proyectiva reducida* del módulo X. Su utilidad es debida a que todos los módulos en estas resoluciones son proyectivos.

Dimensión

Sea m un entero no menor que -1. Un R-mód X se dice que es de *dimensión proyectiva sobre R (o dimensión homológica sobre R)* $\leq m$ si y sólo si existe una resolución proyectiva C de X que satisface $C_n = 0$ para todo $n > m$. Si tal entero no existe, entonces el módulo X se dice que es de *dimensión proyectiva* infinita. El menor de tales enteros recibe el nombre de *dimensión proyectiva* sobre R del módulo X y se denota por

$$projdim(X)$$

1.5. Resolución de Lyubeznik

Sea $R = K[x_1, ..., x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre el campo K. A un ideal monomial I podemos asignarle diferentes resoluciones y a su resolución minimal se le asigna la dimensión proyectiva como vimos anteriormente. Existen en cambio muchas otras que no son necesariamente minimales, por ejemplo la resolución de Taylor, cuya longitud es igual al número de generadores del ideal, descubierta por Diana Taylor en 1960. Si $I = \langle m_1, ..., m_\mu \rangle$ entonces su resolución de Taylor es:

$$\mathbf{T} : 0 \longrightarrow T_\mu \xrightarrow{d_\mu} T_{\mu-1} \xrightarrow{d_{\mu-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} T_0 \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

donde

$$T_0 = Re_\emptyset,\, T_s = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq \mu} Re_{i_1 \cdots i_s},$$

por lo que vemos que cada nodo es libre y graduado con los diferenciales definidos como

$$d_s(e_{i_1 \ldots i_s}) = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} \frac{lcm(y_{i_1}, ..., y_{i_s})}{lcm(y_{i_1}, ..., \widehat{y_{i_j}}, ... y_{i_s})} e_{i_1 \ldots \widehat{i_j} \ldots, i_s}$$

donde lcm denota el mínimo común múltiplo y $e_{i_1 \ldots i_s}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq \mu)$ son elementos base de T_s llamados también *símbolos* y el grado del símbolo $e_{i_1 \ldots i_s}$ está definido por

$$deg(e_{i_1 \ldots i_s}) = deg(lcm(m_{i_1}, \cdots, m_{i_s})).$$

En 1988, Gennady Lybeznik [16] construyó una nueva resolución libre graduada de R/I como un subcomplejo de la resolución de Taylor. A este complejo lo llamamos la *Resolución de Lyubeznik*, cuya longitud es menor que la longitud de Taylor, aunque no siempre se garantiza la minimalidad.

Los símbolos que generan la resolución de Lyubeznik del ideal $I = \langle m_1, ..., m_\mu \rangle$ se construyen de la siguiente manera:

> Sea $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq \mu$. Si $m_q \nmid lcm(m_{i_t}, m_{i_{t+1}}, ..., m_{i_s})$ para todo $t < s$ y para todo $q < i_t$, entonces el símbolo $e_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ se dice *L-admisible*

La resolución de Lyubeznik es la generada por todos los símbolos L-admisibles. Como observación notamos que la resolución de Luybeznik depende del orden de los generadores.

Teorema 1.5.1. *[16, Lyubeznik 1988] El complejo*

$$0 \longrightarrow L^f \xrightarrow{d_f} L^{f-1} \xrightarrow{d_{f-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} L^0 \longrightarrow 0$$

forma una resolución libre de R/I, donde los L^i están generados por todos los símbolos admisibles de dimensión i.

Demostración. Se puede ver en [16] la demostración de Lyubeznik que muestra la exactitud del complejo. $\square$

Capítulo 2

Sobre el número de ecuaciones que definen una variedad

Una cota superior trivial para $ara(I)$ está dada por el número $\mu(I)$ de generadores del ideal. La cota superior puede ser mejorada si se puede construir un conjunto de $r < \mu(I)$ elementos $f_1, ..., f_r$ de I tal que $\sqrt{I} = \sqrt{\langle f_1, ..., f_r \rangle}$. El método de Schmitt-Vogel muestra que, en muchos casos, esto se puede realizar tomando las f_i de I para generar unos conjuntos con sumas adecuadas de generadores monomiales de I. Este método no siempre nos permite construir un conjunto de exactamente $ara(I)$ elementos. Lo propuesto en el siguiente capítulo es conseguir la mejor cota para algunos ideales con una técnica de refinamiento, es decir, se toman las f_i para hacer una combinación lineal de los generadores monomiales con coeficientes adecuados que pueden ser diferentes de 1.

Se presentarán algunos ejemplos de ideales monomiales donde el número de ecuaciones definidas construidas de la forma mencionada es igual al rango aritmético, mientras que el mismo número no puede conseguirse por el método de Schmit-Vogel.

2.1. Un método para el cálculo del rango aritmético

Lema 2.1.1. *[22, Schmitt-Vogel 1979] Sea P un subconjunto finito de R, y sea I el ideal generado por P. Sea $r \geq 0$ un entero. Asumimos que existen subconjuntos $P_0, ..., P_r$ de P tal que las siguientes condiciones se satisfacen:*

(i) $P = P_0 \cup \cdots \cup P_r$.

(ii) $|P_0| = 1$.

(iii) *Para cada l $(0 < l \leq r)$ y para todo $a, a'' \in P_l$ con $a \neq a''$, existe un entero l' $(0 \leq l' < l)$, y un elemento $a' \in P_{l'}$, tal que $aa'' \in \langle a' \rangle$.*

Si fijamos

$$g_l = \sum_{a \in P_l} a, \quad l = 0, 1, ..., r$$

entonces $\sqrt{I} = \sqrt{\langle g_0, g_1, ..., g_r \rangle}$.

Generalización del método Schmitt-Vogel:

Teorema 2.1.2. *(Barile,1996) Sean R anillo local conmutativo, P un subconjunto finito de elementos de R. Sean $P_0, ..., P_r$ subconjuntos de P. Para $0 \leq l \leq r$ sea c_i la cardinalidad de P_i. Supongamos que*

1. $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{r} P_i = P$
2. $c_0 = 1$
3. *Para toda l, con $0 < l \leq r$, existe un entero n_l, $2 \leq n_l \leq c_l$, tal que siempre que $p_1, ..., p_{n_l}$ sean distintos a pares de P_l, entonces $p_1 \cdots p_{n_l} \in (p')$ para algún $p' \in P_{l'}$, $l' < l$.*
   Para toda l, $0 < l \leq r$, sea $A^l = (a_{ij}^{(l)})$ una matriz $(n_l - 1) \times c_l$ con entradas en R. Sea

   $P_0 = \{p_0\}$ y $P_l = \{p_1^{(l)}, ..., p_{c_l}^{(l)}\}$, para $0 < l \leq r$. Fijemos

$$g_i^{(l)} = \sum_{j=1}^{c_l} a_{ij}^{(l)} p_j^{(l)} \qquad (1 \leq i \leq n_l - 1)$$

   y sea J el ideal generado por p_0 y todos los elementos $g_i^{(l)}$ $(0 < l \leq r,\ 1 \leq i \leq n_l - 1)$. Entonces $\sqrt{\langle P \rangle} = \sqrt{J}$, donde $\langle P \rangle$ denota al generado por todos los elementos de P.

$$A^l = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(l)} & a_{1,2}^{(l)} & \cdots & a_{1,c_l}^{(l)} \\ a_{2,1}^{(l)} & a_{2,2}^{(l)} & \cdots & a_{2,c_1}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_l,1}^{(l)} & a_{n_l-1,2}^{(l)} & \cdots & a_{n_l-1,c_l}^{(l)} \end{bmatrix}$$

$$A^l P_l = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(l)} & a_{1,2}^{(l)} & \cdots & a_{1,c_l}^{(l)} \\ a_{2,1}^{(l)} & a_{2,2}^{(l)} & \cdots & a_{2,c_1}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_l,1}^{(l)} & a_{n_l-1,2}^{(l)} & \cdots & a_{n_l-1,c_l}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{(l)} \\ p_2^{(l)} \\ \vdots \\ p_{c_l}^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{(l)} \\ g_2^{(l)} \\ \vdots \\ g_{n_l-1}^{(l)} \end{bmatrix}$$

$$\textit{con} \quad J = \langle p_0, g_i^{(l)} \big| 0 < i \leq n_l - 1,\ 0 < l \leq r \rangle$$

Demostración. Queremos demostrar que

$$\sqrt{\langle P \rangle} = \sqrt{J}$$

$\supseteq$ Como cada elemento de J es combinación lineal de elementos de P se tiene $J \subseteq \sqrt{\langle P \rangle}$ lo que implica $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{\langle P \rangle}$.
$\subseteq$ Fijamos un l con $0 < l \leq r$, y sea $p \in P_l$. Basta demostrar que alguna potencia de p está en J. Se procedera por inducción en l.

Para $l = 0$, se tiene $P_0 = \{p_0\}$ que, por definición se encuentra en J, por lo tanto se tiene lo deseado.

Supongamos cierto para $0 < l' < l$ y afirmamos que es verdad para l. Sin perdida de generalidad $P = P_l$. Podemos asumir que $p = p_1^{(l)}$. Para simplificar, tomaremos $p_1 = p_1^{(l)}$, $c = c_l$, $n = n_l$, $A = A^l$, $a_{ij} = a_{ij}^{(l)}$ y $g_i = g_i^{(l)}$.

Primero afirmamos que si

$$\mu = p_1 p_2^{k_2} \cdots p_c^{k_c} \qquad \text{con} \qquad k_i \geq 0 \qquad \text{y} \qquad k_2 + \cdots + k_c = n - 1$$

entonces μ está en $\sqrt{J}$. En efecto, fijamos $k_1 = 1$ y sea $t = t(\mu)$ la cardinalidad de $\{i | k_i = 1\}$, con $1 \leq t \leq n$. Se usará inducción descendente sobre t para mostrar que $\mu \in \sqrt{J}$.

Caso $\mathbf{t = n}$. Se tiene $\mu = p_1 p_{i_2} \cdots p_{i_n}$ para algunos índices $1 < i_2 < \cdots < i_n \leq c$, es decir, se quitan los p_s para los cuales $k_s = 0$ y quedan los $k_s = 1$. En el inciso (3) del teorema 2.1.2 tenemos garantizado que existe un $p' \in P_{l'}$ con $p_1 \cdots p_{i_n} \in (p')$ y $l' < l$. Además, por hipótesis de inducción tenemos que los $p' \in P_{l'}$ con $l' < l$ están en $\sqrt{J}$ es decir, $p' \in \sqrt{J}$, por lo tanto $\mu = p_1 \cdots p_{i_n} \in \sqrt{J}$.

Caso $\mathbf{t \leq n - 1}$. Como $k_1 + \cdots + k_c = n$ se tiene que $t < n - 1$. De ser $t = n - 1$, entonces reordenando

$$k_1 = \cdots = k_{t=n-1} \qquad \sum_{i=1}^{c} k_i = n$$

lo que implicaría que $k_i = 1$ para algún $t < i \leq c$.

Caso $\mathbf{t < n - 1}$. Supongamos ahora que la afirmación es cierta para valores mayores a t. Entonces sean

$$2 \leq j_2 < \cdots < j_t \leq n$$

índices tales que $k_{j_2} = \cdots = k_{j_t} = 1$ tal que $k_{j_{t+1}} > 1$ para $j_{t+1} \notin \{1, j_2, ..., j_t\}$. Ahora sea $A'_{(n-1)\times(n-1)}$ submatriz de $A_{(n-1)\times c}$ que contiene a las columnas con los índices $1, j_2, ..., j_t, j_{t+1}$, es decir:

$$A' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & j_2 & \dots & j_t & j_{t+1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,j_2} & \cdots & a_{1,j_t} & a_{1,j_{t+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,j_2} & \cdots & a_{n-1,j_t} & a_{n-1,j_{t+1}} \end{bmatrix} \end{array}$$

Como $det(A')$ es un menor maximal entonces es invertible. Además, como R es local, entonces una de las entradas de la $j_{t+1}-$ésima columna de A', digamos $a_{u,j_{t+1}}$ es invertible. Sin perdida de generalidad la matriz A puede ser reemplazada por cualquier otra obtenida de A por medio de operaciones de fila elementales pues ello mantiene sin cambio a J. Así, asumimos que todas las entradas de la fila $u-$ésima de $B \sim A'$ son 0, excepto por $a_{u,j_{t+1}}$. Después de renombrar las columnas de A podemos asumir, para simplificar que $j_2 = 2, ..., j_t = t, j_{t+1} = t+1$, entonces

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & t & t+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{u,t+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

Entonces reescribiendo $A = [B|\cdots]$ se tiene

$$AP = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{u,t+1} & b_{u,t+2} & \cdots & b_{u,c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{t+1} \\ \vdots \\ p_c \end{bmatrix}$$

Con lo que podemos definir

$$g_u = \sum_{j=1}^{c} a_{u,j} p_j = \sum_{j=t+1}^{c} a_{u,j} p_j$$
$$g_u - \sum_{j=t+2}^{c} a_{u,j} p_j = a_{u,t+1} p_{t+1}$$

por lo tanto

$$p_{t+1} = a_{u,t+1}^{-1}\big(g_u - \textstyle\sum_{j=t+2}^{c} a_{u,j} p_j\big)$$

Por lo que al sustituir

$$\begin{aligned}
\mu &= p_1p_2\cdots p_{t+1}^{k_{t+1}}p_{t+2}^{k_{t+2}}\cdots p_c^{k_c} \\
&= p_1p_2\cdots p_{t+1}a_{u,t+1}^{1-k_{t+1}}\big(g_u - \sum_{j=t+2}^{c} a_{u,j}p_j\big)^{k_{t+1}-1}p_{t+2}^{k_{t+2}}\cdots p_c^{k_c} \\
&= \omega g_u + (-1)^{k_{t+1}-1}a_{u,t+1}^{1-k_{t+1}}p_1p_2\cdots p_{t+1}\Big(\sum_{j=t+2}^{c} a_{u,j}p_j\Big)^{k_{t+1}-1}p_{t+2}^{k_{t+2}}\cdots p_c^{k_c},
\end{aligned}$$

Para algún $\omega \in R$. El segundo sumando de la última expresión es una combinación lineal de productos de la forma

$$\nu = p_1p_2\cdots p_{t+1}p_{t+2}^{h_{t+2}}\cdots p_c^{h_c} \qquad (h_i \geq 0)$$

Como $t(\nu) \geq t+1$ para todos los ν, tenemos por la hipótesis de inducción donde se cumplía lo deseado para valores mayores a t que $\mu \in \sqrt{J}$.

Se desea mostrar que la potencia de un elemento de P está en $\sqrt{J}$. Como $A = [B\cdots]$ y el menor consiste de todas las $n-1$ columnas, entonces es invertible, por lo que en la primera columna existe un elemento invertible sea este $a_{v,1}$ con $v \neq u$, puesto que $a_{u,1} = 0$

$$\begin{aligned}
p_1^n &= a_{v,1}^{1-n}p_1\Big(g_v - \sum_{j=2}^{c} a_{v,j}p_j\Big)^{n-1} \\
&= zg_v + (-1)^{n-1}a_{v,1}^{1-n}p_1\big(\sum_{j=2}^{c} a_{v,j}p_j\big)^{n-1}
\end{aligned}$$

por lo que $p_1^n \in J$ por lo que $p_1 \in \sqrt{J}$. $\square$

2.2. Aplicaciones

Se darán ejemplos concretos para la aplicación de 2.1.2. Esto nos da la oportunidad de estudiar ciertos aspectos cohomológicos de los ideales monomiales. Antes que todo recordamos la construcción explícita de la resolución de Lyubeznik, para cualquier ideal monomial.

Sea K un campo y consideramos el anillo de polinomios $R = K[x_1, ..., x_n]$. Sean $\mu_1, ..., \mu_f$ sucesión ordenada de f monomiales en las x_i's. El ideal generado por las $\mu_1, ..., \mu_f$ se llama *ideal monomial.*

Definición 2.2.1. Para todas las sucesiones $(i_1, ..., i_t)$ donde $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq f$, el símbolo $u(i_1, ..., i_t)$ lo consideraremos *dimensión l-admisible* t si para todo $h < t$ y $q < i_h$, donde *lcm* denota al mínimo común múltiplo se tiene μ_q no divide a $lcm(\mu_{i_h}, \mu_{i_{h+1}}, ..., \mu_{i_t})$.

Observación 2.2.2. Si $u(i_1, ..., i_t)$ es l-admisible de dimensión t, entonces $u(i_1, ..., \widehat{i_j}, ..., i_t)$ es l-admisible de dimensión $t-1$.

Sea $L^0 = R$ y para todos los $t = 1, ..., f$, sea L^t el R-módulo libre generado por todos los símbolos L-admisibles de dimensión t. Definimos la aplicación $d_t : L^t \to L^{t-1}$ por

$$d_t(u(i_1, ..., i_t)) = \sum_{j=1}^{t} \frac{lcm(\mu_{i_1}, ..., \mu_{i_t})}{lcm(\mu_{i_1}, ..., \widehat{\mu_{i_j}}, ..., \mu_{i_t})} u(i_1, ..., \widehat{i_j}, ..., i_t)$$

Definición 2.2.3. Sea I un ideal en un anillo conmutativo Noetheriano R. Sea $H_I^i(R)$ el i-ésimo módulo de cohomología local de R con soporte en I. La *dimensión cohomológica* de I está definida para ser el natural

$$cd(I) = max\{i \mid H_I^i(R) \neq 0\}$$

Para los siguientes ejemplos supondremos que R es el anillo de polinomios $R = K[x_1, ..., x_n]$, donde K es un campo infinito. Hartshorne [10] observó que para todos los ideales I en un anillo conmutativo Noetheriano $cd(I) \leq ara(I)$. Para todos los ideales monomiales I se tiene que $cd(I) = projdim(R/I)$ dónde $projdim(R/I)$ denota a la dimensión proyectiva de I, es decir, la longitud de una resolución libre minimal de R/I. En muchos casos calcularemos $projdim(R/I)$ por exponer una resolución de Lyubeznik de I que es minimal. Se usará el teorema 2.1.2 para construir $projdim(R/I)$ elementos generadores de I hasta el radical. De esta forma se probará que $ara(I) = projdim(R/I)$.

Proposición 2.2.4. *Sea $P = \{\mu_1, ..., \mu_s\}$, donde los $\mu_i \neq \mu_j$ con $i \neq j$ son monomios libres de cuadrado de R. Supongamos que para algún entero positivo $m < s$, el elemento μ_1 divide cada producto $\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_m}$, $2 \leq i_1 < \cdots < j_t \leq s$. Además para todo j, $1 \leq j \leq s$, el monomio μ_j cumple lo siguiente:*

> *no divide a $\mu_{j_1} \cdots \mu_{j_t}$, para todas las posibles elecciones de $t < m$ y de $1 \leq j_1 < \cdots < j_t \leq s$, $(j \neq j_\nu)$.*

Sea $I = \langle P \rangle$. Entonces $ara(I) = m$.

Demostración. Queremos probar que $ara(I) = m$ por lo tanto se probará la primera desigulded

($\leq$) Podemos aplicar el teorema 2.1.2 a los subconjuntos

$$P_0 = \{\mu_1\} \qquad \text{y} \qquad P_1 = \{\mu_2, ..., \mu_s\}$$

con $n_1 = m$ pues por hipótesis cualquier producto de μ_1 sería un múltiplo de P_0. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $(m-1) \times (s-1)$ con entradas en R cuyos menores maximales son todos invertibles. Entonces se tiene

$$I = \sqrt{\left\langle \mu_1, \sum_{j=2}^{s-1} a_{1,j}\mu_j, ..., \sum_{j=2}^{s-1} a_{m-1,j}\mu_j \right\rangle}$$

Por lo tanto I puede ser generado por m elementos hasta el radical. Por lo tanto se tiene lo deseado.

($\geq$) Basta demostrar que I tiene una resolución de Lyubeznik que es libre y minimal de longitud m, así $m = projdim(R/I) = cd(I) \leq ara(I)$.

Consideramos la resolución de Lyubeznik para $\mu_1, ..., \mu_s$. Afirmamos que $u(i_1, ..., i_t)$ es l-admisible si y sólo si $i_1 = 1$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $i_h \neq 1$. Como $u(i_1, ..., i_t)$ es l-admisible, implica que para todo $h < m$ y para toda $q < i_h$ se tiene $\mu_q \nmid lcm(\mu_{i_h}, ..., \mu_{i_t})$. En particular para $h = 1$ y suponiendo que $q = 1 < i_h$ se tiene que $\mu_1 \nmid lcm(\mu_{i_1}, ..., \mu_{i_h})$, pero $\mu_1 | \mu_{i_1} \cdots \mu_{i_h}$ pues son monomios libres de cuadrado. Por lo tanto $1 = i_1$.

($\Leftarrow$) Sea $h < m$ y $q < i_h$, por demostrar que $\mu_q \nmid lcm(\mu_{i_h}, ..., \mu_{i_m})$.

Caso $h > 1$: Por la segunda parte de las hipótesis en la proposición $\mu_q \nmid \mu_{i_h} \cdots \mu_{i_m}$, y por ser libres de cuadrado se tiene que $\mu_q \nmid lcm(\mu_{i_h}, ..., \mu_{i_m})$

Caso $h = 1$: Así $i_h = i_1 = 1$, no hay algo que probar.

Por la primer hipótesis de la proposición no existen símbolos l-admisibles de dimensión $t > m$. Por lo tanto, la resolución de Lyubeznik para $\mu_1, ..., \mu_s$ tiene longitud m. Por lo anterior tiene que ser minimal. Por lo que $m = projdim(R/I)$.

□

Ejemplos

Ejemplo 2.2.5. Para todo $n \geq 3$ sea I_n el ideal de $R = K[x_1, ..., x_{2n-2}]$ generado por los siguientes n monomios:

$$\mu_1 = x_1 \cdots x_{n-1}, \quad \mu_2 = x_1 x_n, \quad \mu_3 = x_2 x_{n+1}, \ldots, \mu_n = x_{n+1} x_{n+2}$$

Veamos que valores generan al ideal I_n. Usemos las hipótesis de la proposición 2.2.4, para ello, pongamos

$$P_0 = \{\mu_1\}, \quad P_1 = \{\mu_2, ..., \mu_n\}.$$

Vemos que μ_1 divide solamente al producto $\mu_2 \cdots \mu_n$ pero si le quitamos algún valor μ_1 ya no lo divide, por lo tanto nuestro entero positivo $m < n$ que cumple con los requisitos de la proposición es $m = n - 1$. Entonces, por las hipótesis de la proposición anterior tenemos que $ara(I_n) = n - 1$. Como P_1 tiene cardinalidad $n - 1$, la matriz $A^l = A^1 = A$ es de dimensión $(n-2) \times (n-1)$.

Como se había hecho en la prueba de 2.1.1, podemos usar una matriz con entradas en el anillo R tal que sus menores maximales sean invertibles, además, como no afectan las operaciones de reducción por filas podremos usar la matriz

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pues la matriz satisface lo asumido en 2.1.1, por lo tanto al multiplicar se obtiene:

$$A_n P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_2 + \mu_n \\ \mu_3 + \mu_n \\ \vdots \\ \mu_{n-1} + \mu_n \end{bmatrix}$$

Así, aplicando el teorema 2.1.2 tenemos que

$$I_n = \sqrt{\langle x_1 \cdots x_{n-1}, x_1 x_n + x_{n-1} x_{2n-2}, x_2 x_{n+1} + x_n x_{2n-2}, ..., x_{n-2} x_{2n-3} + x_{n-1} x_{2n-2} \rangle}.$$

El siguiente ejemplo muestra que no para todos los ideales se puede usar la proposición anterior.

Ejemplo 2.2.6. Para todo $n \geq 3$ sea U_n el ideal de $R = K[x_1, ..., x_{2n+1}]$ generado por los siguientes $n + 2$ monomios:

$$\begin{aligned} \mu_i &= x_1 x_2 x_{2i+1} x_{2i+2}, \qquad i = 1, ..., n-1 \\ \mu_n &= x_1 x_3 x_5 \cdots x_{2n-1} x_{2n+1}, \\ \mu_{n+1} &= x_1 x_4 x_6 x_8 \cdots x_{2n-2} x_{2n} x_{2n+2}, \\ \mu_{n+2} &= x_2 x_3 \cdots x_{2n} x_{2n+1} \end{aligned}$$

Se observa que el teorema 2.1.2 puede ser aplicado a los subconjuntos

$$P_0 = \{\mu_1\}, \quad P_1 = \{\mu_2, ..., \mu_{n+2}\}.$$

Como el producto de cualquiera n elementos de P_1 es un múltiplo de μ_1 (pues cada variable x_1, x_2, x_3, x_4 aparece en al menos dos diferentes monomios μ_j, con $2 \leq j \leq n+2$). Se obtiene la resolución minimal de Lyubeznik de U_n correspondiente a la sucesión $\mu_1, ..., \mu_{n+2}$ de longitud n:

$$
\begin{aligned}
L^1 &= \bigoplus_{i=1}^{n+2} Ru(i) \\
L^2 &= \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n+1} Ru(i_1, i_2) \oplus Ru(1, n+2) \\
L^3 &= \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n+1 \\ (i_2, i_3) \neq (n, n+1)}} Ru(i_1, i_2, i_3) \oplus Ru(1, n, n+1) \\
L^t &= \bigoplus_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n+1 \\ (i_{t-1}, i_t) \neq (n, n+1)}} Ru(i_1, ..., i_t), \qquad \text{para } 4 \leq t \leq n
\end{aligned}
$$

Entonces $ara(U_n) = n$ para toda n y U_n puede ser generado por n combinaciones K-lineales de $\mu_1, ..., \mu_{n+2}$ hasta el radical.

En el siguiente ejemplo se usa el programa MACAULAY para el cálculo de la dimensión proyectiva. Por lo tanto, tenemos que fijar la característica de K: la fijamos igual a 0. En el cálculo del rango aritmético del ideal en el siguiente ejemplo tenemos que aplicar el teorema 2.1.2 para $r > 1$.

Ejemplo 2.2.7. Sea I ideal de $R = K[x_1, ..., x_{12}]$ generado por los siguientes 8 monomios

$$
\mu_1 = x_1x_2x_3, \ \mu_2 = x_1x_4x_5x_6, \ \mu_3 = x_2x_7, \ \mu_4 = x_3x_8, \\
\mu_5 = x_1x_9 \ \mu_6 = x_4x_{10}, \ \mu_7 = x_5x_{11}, \ \mu_8 = x_6x_{12}
$$

y sean

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \{\mu_1\}, \\
P_1 &= \{\mu_2, \mu_3, \mu_4\}, \\
P_2 &= \{\mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8\}.
\end{aligned}
$$

Vemos que para P_1 el entero $n_1 = 3$ pues solamente el producto de los tres elementos de P_1 es múltiplo de μ_1, además su cardinalidad $c_1 = 3$. Para P_2 el entero $n_2 = 4$ pues solamente el producto de los cuatro elementos es múltiplo de algún elemento en P_1, con cardinalidad $c_2 = 4$. Por lo tanto, tenemos nuestras matrices como

$$
A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Se obtiene que I está definido por 6 elementos hasta el radical.

$$
I = \sqrt{\langle x_1x_2x_3, \ x_1x_4x_5x_6 + x_3x_8, \ x_2x_7 + x_3x_8, \ x_1x_9 + x_6x_{12}, \ x_4x_{10} + x_6x_{12}, \ x_5x_{11} + x_6x_{12} \rangle}.
$$

Notamos que una de las resoluciones de Lyubeznik de I es minimal. Para el cálculo de la dimensión cohomológica se usa el programa MACAULAY, este da $projdim(R/I) = 6$, entonces $ara(I) = 6$.

El último ejemplo muestra que el número de elementos encontrados por medio del teorema 2.1.2 en general depende de la elección de subconjuntos $P_0, ..., P_r$.

Ejemplo 2.2.8. Sea $R = K[x_1, ..., x_{12}]$. Sea I el ideal de R generado por los siguientes monomios:

$$\mu_0 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6, \quad \mu_1 = x_1x_2x_3x_7, \quad \mu_2 = x_2x_3x_4x_8,$$
$$\mu_3 = x_1x_4x_5x_9, \quad \mu_4 = x_2x_5x_6x_{10}, \quad \mu_5 = x_3x_5x_6x_{11}, \quad \mu_6 = x_1x_4x_6x_{12}$$

Primero tomamos:

$$\begin{aligned} P_0 &= \{\mu_0\}, \\ P_1 &= \{\mu_1, \mu_3, \mu_5\}, \\ P_2 &= \{\mu_2, \mu_4, \mu_6\}. \end{aligned}$$

Se aplica el teorema 2.1.2 para $n_1 = n_2 = 3$ y se obtiene $1 + 2 + 2 = 5$ elementos definiendo a I hasta el radical. Pero si se toma:

$$P_0 = \{\mu_0\}, \qquad P_1 = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\},$$

el teorema 2.1.2 lo podemos aplicar para $n_1 = 4$ tomando

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde $a, b \in K$, $a, b \neq \{0, 1\}$, $a^2 \neq b^2$ y $a^2 - b^2 - 2a + 2b \neq 0$, entonces se obtiene

$$I = \sqrt{\langle \mu_0, \mu_1 + \mu_4 + a\mu_5 + b\mu_6, \mu_2 + \mu_4 + b\mu_5 + a\mu_6, \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 \rangle}.$$

Por otro lado si se puede mostrar que $projdim(R/I) = 4$, entonces $ara(I) = 4$

Observación 2.2.9. Para un ideal monomial I en $K = [x_1, ..., x_n]$ estamos lejos de considerar la variedad afín asociada $V(I)$: las ecuaciones definidas encontradas por medio de 2.1.1 no son necesariamente homogéneas. Pero existe un ideal I' generado por monomios que tienen todos el mismo grado, que tiene el mismo radical como I. Si aplicamos 2.1.1 en I' se obtiene un conjunto de ecuaciones definidas de la variedad proyectiva $V(I)$.

Capítulo 3

Ideales cuyo radical es un ideal monomial

Se desarrolla un método general para construir un ideal polinomial que tiene el mismo radical que un ideal monomial dado, pero con menos generadores. Esto proveé una cota superior para el rango aritmético de ideales monomiales. Se trabaja con el caso Schmitt-Vogel pero los generadores se dan de forma diferente al capítulo anterior.

3.1. Antecedentes

Lema 3.1.1. *[22, Schmitt-Vogel 1979] Sea P un subconjunto finito de elementos de R. Sea $P_0, ..., P_r$ un subconjunto de P tal que*

1. $\bigcup_{i=0}^{r} P_i = P$
2. *P_0 tiene exactamente un elemento*
3. *Si p y p'' son elementos diferentes de P_l $(0 < l \leq r)$ existe un entero l' con $0 \leq l' < l$ y un elemento $p \in P_{l'}$ tal que $pp'' \in \langle p' \rangle$*

Fijamos a $q_l = \sum_{p \in P_l} p^{e(p)}$, donde $e(p) \geq 1$ son enteros arbitrarios. Escribimos $\langle P \rangle$ al ideal de R generado por los elementos de P. Entonces obtenemos

$$\sqrt{\langle P \rangle} = \sqrt{\langle q_0, ..., q_r \rangle}$$

Aplicamos este lema al anillo de polinomios $R = K[x_1, ..., x_n]$ donde K es un campo, para calcular cotas superiores para el rango aritmético de ideales generados por monomios, es decir, por productos de indeterminadas.

Ahora para los símbolos L-admisibles definimos un orden y haremos uso nuevamente de la resolución de Lyubeznik.

Observación 3.1.2. Definimos un orden parcial en el conjunto de símbolos:

$$u(i_{i_1}, ..., i_{j_s}) \leq u(i_1, ..., i_t)$$

siempre que $\{i_{i_1}, ..., i_{j_s}\} \subseteq \{i_1, ..., i_t\}$. De forma evidente, si el símbolo mayor es admisible también lo serán los símbolos más pequeños. Ahora, supongamos que $u(i_1, ..., i_t)$ es admisible, entonces se tiene:

$$lcm(\mu_{i_1}, ..., \mu_{i_t}) \neq lcm(\mu_{i_1}, ..., \hat{\mu_{i_j}}, ..., \mu_{i_t}) \quad \text{para todo } j = 1, ..., t \tag{3.1}$$

si y sólo si para todo $j = 1, ..., t$

$$\mu_{i_j} \nmid lcm(\mu_{i_1}, ..., \hat{\mu}_{i_j}, ..., \mu_{i_t})$$

Si (3.1) sucede, entonces también para los símbolos admisibles más pequeños de $u(i_1, ..., i_t)$. Como una consecuencia, la resolución de Lyubeznik es minimal sí y sólo si (3.1) sucede para todos los símbolos admisibles maximales.

Como el rango aritmético es el mismo hasta el radical, podemos restringirnos a ideales generados por monomios libres de cuadrado y lo podremos ver por lo siguiente:

Proposición 3.1.3. *Sean $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ para toda $\alpha_i \geq 0$ y $\bar{x} = x_1 \cdots x_n$, probaremos que $x^\alpha \in \sqrt{I}$ si y sólo si $\bar{x} \in \sqrt{I}$.*

Demostración:

($\Leftarrow$) Sea $\bar{x} \in \sqrt{I}$, entonces $\bar{x} \cdot x_{i_1}^{\alpha_{i_1}-1} \cdots x_{i_k}^{\alpha_{i_k}-1}$ para toda i_s con $\alpha_{i_s} \geq 2$, entonces $x^\alpha \in \sqrt{I}$

($\Rightarrow$) Sean $x^\alpha \in \sqrt{I}$, $m = \text{máx}\ \{\alpha_i\}$ y $\bar{x}^m = x^\alpha x^\beta \in \sqrt{I}$ lo que implica $(\bar{x}^m)^p \in I$ por lo que $\bar{x}^{mp} \in \sqrt{I}$.

Sobre el conjunto de monomios libres de cuadrado de R podemos considerar el orden parcial dado por divisibilidad.

3.2. Un criterio libre de característica

Se aplicará el lema 3.1.1 a una construcción recursiva de polinomios que definen un ideal monomial dado hasta el radical. Estos polinomios son unívocamente determinados. Ellos son las sumas de monomios y no dependen de la característica de K.

Proposición 3.2.1. *Sean I un ideal de R generado por monomios libres de cuadrado y sea N un entero positivo. Se define*

$$\Gamma_1(I) = \{generadores\ minimales\ de\ I\}$$

y para todo $i = 2, ..., N-1$

$$\Gamma_i(I) = \{todos\ los\ elementos\ minimales\ de\ G_i(I)\}$$

con

$$G_i(I) = \{lcm(\mu, \nu) \big| \, \mu, \nu \in \Gamma_{i-1}(I),\ \mu \neq \nu\}$$

Si $\Gamma_{i-1}(I)$ tiene solo un elemento, entonces $G_i(I) = \Gamma_{i-1}(I)$. Sea

$$\mu_0 = \underset{\mu \in G_N(I)}{gcm} \mu$$

Si $\mu_0 \in I$ entonces

$$I = \sqrt{\left\langle \mu_0, \sum_{\mu \in \Gamma_{N-1}(I)} \mu, ..., \sum_{\mu \in \Gamma_1(I)} \mu \right\rangle}$$

En partícular, $ara(I) \leq N$.

Demostración. Es suficiente aplicar (3.1.1) a los P conjuntos:

$$P_0 = \mu_0, \qquad P_i = \Gamma_{N-i}(I), \quad i = 1, ..., N-1.$$

□

Observación 3.2.2.

1. Como vemos μ_0 puede describirse como el producto de todas las indeterminadas que aparecen en $\Gamma_{N-1}(I)$, menos una.

2. El conjunto $\Gamma_i(I)$ puede ser reemplazado por cualquier conjunto de monomios que pertenecen a I tal que todo elemento en $G_i(I)$ es un multiplo de alguno de ellos.

3. En cualquier caso, los polinomios que definen a I hasta el radical pueden hacerse homogéneos dando a las indeterminadas exponentes adecuados.

Ejemplo 3.2.3. Sea $F = K[x_1, ..., x_7]$ y el ideal

$$I = (x_1, x_2, x_3) \cap (x_3, x_4, x_5) \cap (x_5, x_6, x_7).$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcl}
\Gamma_1(I) & = & \{x_1, x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_3x_6, x_3x_7, x_1x_4x_6, x_1x_4x_7, x_2x_4x_6, x_2x_4x_7\}, \\
\Gamma_2(I) & = & \{x_1x_2x_5, x_1x_3x_5, x_2x_3x_5, x_3x_5x_6, x_3x_5x_7, x_3x_6x_7 \\
& & x_1x_2x_4x_6, x_1x_2x_4x_7, x_1x_3x_4x_6, x_1x_3x_4x_7, x_1x_4x_5x_6, x_1x_4x_5x_7, x_1x_4x_6x_7, \\
& & x_2x_3x_4x_6, x_2x_3x_4x_7, x_2x_4x_5x_6, x_2x_4x_5x_7, x_2x_4x_6x_7\} \\
\Gamma_3(I) & = & \{x_1x_2x_3x_5, x_1x_3x_5x_6, x_1x_3x_5x_7, x_2x_3x_5x_6, x_2x_3x_5x_7, x_3x_5x_6x_7, \\
& & x_1x_2x_3x_4x_6, x_1x_2x_3x_4x_7, x_1x_2x_4x_5x_6, x_1x_2x_4x_5x_7, x_1x_2x_4x_6x_7, x_1x_3x_4x_6x_7 \\
& & x_1x_4x_5x_6x_7, x_2x_3x_4x_6x_7, x_2x_4x_5x_6x_7\} \\
\Gamma_4(I) & = & \{x_1x_2x_3x_5x_6, x_1x_2x_3x_5x_7, x_1x_3x_5x_6x_7, x_2x_3x_5x_6x_7, x_1x_2x_4x_5x_6x_7, x_1x_2x_3x_4x_6x_7\}
\end{array}$$

$\mu_0 = x_1x_2x_3x_5x_6x_7 \in I$.

Se sigue que $ara(I) \leq 5$ con $char(R) = 0$, los cálculos muestran que $projdim(R/I) = 5$, entonces $ara(I) = 5$.

Proposición 3.2.4. *Supongamos que algún generador minimal μ de f divide a todos los productos $\alpha\beta$ donde α y β son elementos minimales distintos del conjunto*

$$\{lcm(\sigma_1, ..., \sigma_{N-1})\big|\sigma_1, ..., \sigma_{N-1} \text{ son elementos distintos de } \Gamma_1(I) \setminus \{\mu\}\}.$$

Entonces $ara(I) \leq N$.

Demostración. Sea $\Gamma_1'(I)$ la suma de todos los elementos de $\Gamma_1(I) - \{\mu\}$ y para todos los $i = 2, ..., N-1$ sea $\Gamma_i'(I) = \{lmc(\mu_{j_i}, ..., \mu_{j_i})\big|\mu_{j_i} \in \Gamma_1(I)\}$. Luego se define

$$\gamma_i(I) = \sum_{x \in \Gamma_i(N)} x, \qquad 1 \leq i \leq N-1.$$

Entonces tomamos

$$\begin{array}{rl}
P_0 = & \{\mu\}, \\
P_i = & \Gamma_{N-1}(I).
\end{array}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{I} = \sqrt{\langle \mu_0, \gamma_1, ..., \gamma_{N-1} \rangle}.$$

$\square$

Observación 3.2.5. Este resultado generaliza a la proposición (2.1.2). De acuerdo a esta proposición, $ara(I) \leq N$ si algún generador minimal divide a todos los productos de los otros generadores minimales. Esta condición, si I es un ideal monomial libre de cuadrado, claramente implica la proposición (3.2.4).

Ejemplo 3.2.6. Se aplica la proposición 2.2.8 el anillo $R = K[x_1, ..., x_{12}]$ con el ideal

$$I = (x_1x_2x_3x_4x_5x_6, x_1x_2x_3x_7, x_2x_3x_4x_8, x_1x_4x_5x_9, x_2x_5x_6x_{10}, x_3x_5x_6x_{11}, x_1x_4x_6x_{12})$$

tal que la intersección de ideales primos es de altura 3 y 4, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} I = \mathrm{Rad}(&x_1x_2x_3x_4x_5x_6, x_1x_2x_3x_7 + x_2x_5x_6x_{10} + ax_3x_5x_6x_{11} + bx_1x_4x_6x_{12},\\ &x_2x_3x_4x_8 + x_2x_5x_6x_{10} + bx_3x_5x_6x_{11} + ax_1x_4x_6x_{12},\\ &x_1x_4x_5x_9 + x_2x_5x_6x_{10} + x_3x_5x_6x_{11} + x_1x_4x_6x_{12}),\end{aligned}$$

si $a, b \in K - \{0, 1\}$ son tales que $a^2 \neq b^2$ y $a^2 - b^2 - 2a + 2b \neq 0$. Dichos elementos siempre existen si K es un campo infinito. El método presentado en (3.2.4) nos encuentra 4 polinomios f_1, f_2, f_3, f_4 tal que $I = \sqrt{\langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle}$ sobre cualquier campo K. Los polinomios f_1, f_2, f_3 y f_4 son los siguientes:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \mu = x_1x_2x_3x_4x_5x_6\\
f_2 &= x_1x_2x_3x_7 + x_2x_3x_4x_8 + x_1x_4x_5x_9 + x_2x_5x_6x_{10} + x_3x_5x_6x_{11} + x_1x_4x_6x_{12}\\
f_3 &= x_1x_2x_3x_4x_7x_8 + x_1x_4x_5x_6x_9x_{12} + x_2x_3x_5x_6x_{10}x_{11} + x_1x_2x_3x_4x_5(x_7 + x_8)x_9\\
&\quad +x_1x_2x_3x_4x_6(x_7 + x_8)x_{12} + x_1x_2x_3x_5x_6(x_{10} + x_{11})x_7 + x_1x_2x_4x_5x_6(x_9 + x_{12})x_{10}\\
&\quad +x_1x_3x_4x_5x_6(x_9 + x_{12})x_{11} + x_2x_3x_4x_5x_6(x_{10} + x_{11})x_8\\
f_4 &= x_1x_2x_3x_4x_5x_6\Big(x_7\big(x_8(x_{10} + x_{11}) + x_9(x_{10} + x_{11} + x_{12}) + (x_{10} + x_{11})x_{12}\big)\\
&\quad +x_8\big(x_9(x_{10} + x_{11} + x_{12}) + (x_{10} + x_{11})x_{12}\big) + x_{10}(x_9 + x_{12})x_{11}\Big)\\
&\quad +x_1x_2x_3x_4x_5x_7x_8x_9 + x_1x_2x_3x_4x_6x_7x_8x_{12} + x_1x_2x_3x_5x_6x_7x_{10}x_{11}\\
&\quad +x_1x_2x_4x_5x_6x_9x_{10}x_{12} + x_1x_3x_4x_5x_6x_9x_{11}x_{12} + x_2x_3x_4x_5x_6x_8x_{10}x_{11}.
\end{aligned}$$

En la resolución de Lyubeznik correspondiente a la sucesión de generadores minimales dada anteriormente, los símbolos admisibles maximales son las sucesiones formadas por $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ seguidos de todos los generadores restantes que no contienen indeterminadas fijas x_i, para $i = 1, ..., 6$. Para todo i, existen exactamente 4 dichos generadores. Por lo tanto, la correspondiente resolución de Lyubeznik tiene longitud 4. Es minimal por la observación (3.1.2), entonces $projdim(R/I)$=4. Se tiene entonces que $ara(I)$=4.

El siguiente ejemplo muestra que lo asumido en (3.2.4) es más débil que lo asumido en la (2.1.2).

Ejemplo 3.2.7. En $R = K[x_1, ..., x_7]$ consideramos el ideal

$$I = (x_1, x_2, x_3) \cap (x_2, x_4, x_5) \cap (x_1, x_3, x_6, x_7) \cap (x_3, x_5, x_7) \cap (x_1, x_3, x_5)$$

Tenemos

$$\Gamma_1(I) = \{x_1x_5, x_2x_3, x_3x_4, x_3x_5, x_1x_2x_7, x_1x_4x_7, x_2x_5x_6, x_2x_5x_7\}$$

Sea

$$\mu = x_2x_3$$

El conjunto de los mínimos común múltiplos minimales de 3 elementos de S es

$$\begin{aligned}\gamma_3(I) &= \{x_1x_2x_3x_5x_6, x_1x_3x_5x_7, x_1x_3x_4x_5, x_2x_3x_4x_5x_6, x_2x_3x_4x_5x_7,\\ &\quad x_2x_3x_5x_6x_7, x_1x_2x_3x_4x_7\}\end{aligned}$$

El producto de cada dos de ellos es un múltiplo de μ. Por lo tanto la proposición (3.2.4) garantiza que $ara(I) \leq 4$. Cuatro ecuaciones definidas pueden ser obtenidas considerando

$$\begin{aligned}\gamma_2(I) &= \{x_1x_3x_5, x_1x_2x_5x_7, x_1x_4x_5x_7, x_1x_2x_5x_6, x_2x_3x_5x_6, x_2x_3x_5x_7,\\ &\quad x_3x_4x_5, x_1x_3x_4x_7, x_1x_2x_4x_7, x_2x_5x_6x_7\}\end{aligned}$$

Otra vez en $char(R) = 0$, $projdim(R/I)$ =4, entonces $ara(I)$=4. La misma cota superior no puede derivarse de (2.1.2), pues ninguno de los elementos de $\Gamma_1(I)$ es un divisor de los productos de los elementos restantes tomados de 4 por 4. De hecho, todo elemento divisible por x_1, x_2 ó x_3, pero existen 4 elementos no divisibles por x_1, 4 no divisibles por x_2 y 4 no divisibles por x_3.

Observación 3.2.8. En el ejemplo (3.2.6) el método de Schmitt y Vogel sólo funciona para una cota superior $ara(I) \leq 7$, como ninguno de los generadores minimales divide al producto de otros dos: aquí vemos que el otro método es más eficiente. Pero ese no siempre es el caso como se verá a continuación

Ejemplo 3.2.9. En el anillo $R = K[x_1, ..., x_7]$. Sea I el ideal

$$\begin{aligned}I &= (x_1, x_2) \cap (x_1, x_3) \cap (x_1, x_4) \cap (x_2, x_3, x_4) \cap (x_2, x_3, x_7) \cap (x_2, x_4, x_6) \cap (x_3, x_4, x_5)\\ &= (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2x_5, x_1x_3x_6, x_1x_4x_7)\end{aligned}$$

El método de Schmitt-Vogel nos da

$$I = \sqrt{\langle x_1x_2x_3, x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, x_1x_2x_5 + x_1x_3x_6 + x_1x_4x_7 \rangle}$$

y la cota superior es $ara(I) \leq 3$, ($projdim(R/I) = 3$ en $char(R) = 0$) mientras que

$$\Gamma_2(I) = \{x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_3x_5, x_1x_2x_3x_6, x_1x_2x_4x_5, x_1x_2x_4x_7, x_1x_3x_4x_6, x_1x_3x_4x_7\}$$

y

$$\underset{\mu \in G_3}{gcm} = x_1 \notin I.$$

Por otro lado

$$\Gamma_3(I) = \{x_1x_2x_3x_4x_5, x_1x_2x_3x_4x_6, x_1x_2x_3x_4x_7, x_1x_2x_3x_5x_6, x_1x_2x_4x_5x_7, x_1x_3x_4x_6x_7\}$$

de donde

$$\underset{\mu \in G_4}{gcd}\ \mu = x_1x_2x_3x_4 \in I,$$

entonces (3.2.1) da $ara(I) \leq 4$. La misma cota superior surge de (3.2.4)

Apéndice

Resolución de Lyubeznik

Sea I un ideal monomial en $R = K[x_1, ..., x_n]$ y

$$0 \longrightarrow \oplus_j R(-j)^{\beta_{pj}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \oplus_j R(-j)^{\beta_{0j}} \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

una resolución libre minimal graduada de I sobre R. Aquí p es llamada la *dimensión proyectiva de* I sobre R y denotado por $projdim(R/I)$. Por lo tanto

$$0 \longrightarrow \oplus_j R(-j)^{\beta_{pj}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \oplus_j R(-j)^{\beta_{0j}} \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

es una resolución libre minimal graduada de R/I sobre R. Entonces tenemos que:

1. $projdim(R/I) = projdim(I) + 1$,
2. La graduación $R(-j) = \bigoplus_{i=0} R(-j)_i$ está dada por $R(-j)_i = R_{-j+i}$
3. Escribimos $\beta_i = \sum_j \beta_{ij}$ y si $I = \langle m_1, ..., m_r \rangle$ con $deg(m_i) = a_i$ para $i = 1, ..., r$ tenemos que $\beta_0(I) = \mu(I)$ y $\beta_{0j} = \big|\{\mu_i | a_i = j\}\big|$

Si el orden de los generadores minimales es $m_1 < \cdots < m_r$ y tomamos a todas las sucesiones de índices $(i_1, ..., i_t)$ donde $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq r$ los símbolos $u(i_1, ..., i_t)$ son llamados L-admisibles si cumplen:

$$\text{para todo } h < t \text{ y } q < i_h \text{ se tiene que} \quad m_q \nmid lcm(m_{i_h}, ..., m_{i_t})$$

Tenemos entonces que los símbolos admisibles serán los elementos básicos que generarán a cada nodo de la resolución de Lyubeznik.

Para los símbolos generadores escribimos una tabla que es presentada a continuación:

β_{0j}	$u(i_1)$, todos los generadores minimales de I
β_{1j}	$u(i_1, i_2)$ símbolos admisibles tamaño $t = 2$ con $j = deg(lcm(\mu_{i_1}\mu_{i_2}))$
$\vdots$	$\vdots$
β_{rj}	$u(i_1, ..., i_{r+1})$ símbolo admisible con $j = deg(lcm(\mu_{i_1}, ..., \mu_{i_{r+1}}))$
$\vdots$	$\vdots$
β_{pj}	$u(\mu_1, ..., \mu_{p+1})$ símbolo admisible con $j = deg(lcm(\mu_{i_1}, ..., \mu_{p+1}))$

Debemos tener claro que el recorrimiento que se hace al tomar la resolución del ideal I y del cociente R/I hace que los símbolos básicos puedan tener una alteración al nodo asignado, es decir:

$$\beta_{tj}(R/I) = \beta_{t-1j}(I) = \big|\{u(i_1, ..., i_t)|u \text{ es símbolo admisible y } j = deg(lcm(m_{i_1}, ..., m_{i_t}))\}\big|$$

Si consideramos a $u(i_1, ..., i_t)$ como un símbolo admisible de dimensión t tenemos lo siguiente:

1. $u(i_{j_1}, ..., i_{j_r})$ es símbolo admisible también para todo $r \leq t$ y para todo $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq t$.

2. Como $u(i_1, ..., i_t)$ es un símbolo admisible de dimensión t entonces $i_1 = 1$. Si $i_1 > 1$ entonces $u(1, i_1, ..., i_t)$ es un símbolo admisible de dimensión $t + 1$.

3. Si $l < i_1$ entonces $u(l, i_1, ..., i_t)$ no es símbolo admisible de dimensión $t + 1$, entonces $m_l m_{i_1} \cdots m_{i_t}$ se puede dividir por al menos uno de los $m_1, ..., m_{l-1}$.

Altura

Definición .0.10. Sea R un anillo conmutativo no trivial, tenemos

1. Una cadena
$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$
en el que $P_0, ..., P_n$ son ideales primos de R es llamada *cadena de ideales primos de* R, la *longitud* de dicha cadena es el número de enlaces, es decir, el número de ideales primos presentes menos uno, por lo tanto la cadena anterior tiene longitud n.

2. Una cadena
$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$
es considerada como *maximal*, si entre dos ideales primos consecutivos no existe otro insertado.

3. La *dimensión de* R denotada por $dim(R)$ está definida como
$$sup\{n \in \mathbb{N}_0 | P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n\}.$$

4. Sea $P \in Spec(R)$, la *altura de* P, denotada por $ht(P)$ está definida para ser el supremo de las longitudes de cadena
$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$
de los ideales primos de R tal que $P_n = P$.

Observación .0.11.

1. Si todo ideal del anillo R está contenido en un ideal maximal M se tiene que $dim(R)$ es igual al supremo de $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$ con $P_n = M$ y P_0 ideal primo minimal de 0. Entonces si $dim(R)$ es finito tenemos que:
$$\begin{aligned} dim(R) &= sup\{ht(M)|M \text{ es un ideal maximal de } R\} \\ &= sup\{ht(P)|P \in Spec(R)\} \end{aligned}$$

2. Si R es local, entonces $dim(R) = ht(M)$.

3. Si $S \subset R$ subconjunto multiplicativamente cerrado y $P \in Spec(R)$ tal que $P \cap S = \emptyset$ entonces $S^{-1}P \in Spec(S^{-1}R)$ obtenemos que:
$$ht_{S^{-1}R}S^{-1}P = ht_R P \quad \text{y} \quad htP = ht_{R_P} PR_P = dim(R_P)$$

4. En el anillo de clases residuales R/I con $I \lhd R$ se tiene una cadena de ideales primos para R/I como:
$$P_0/I \subset P_1/I \subset \cdots \subset P_n/I$$
donde:
$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$
es una cadena de ideales primos de R, tal que $I \subset P_0$, por lo tanto ponemos que $dim(I) := dim(R/I)$ que a su vez es:
$$sup\{n \in \mathbb{N}_0 | I \subset P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n\}.$$

Para una variedad tenemos $dim(V) = dim(I(V))$ y para un ideal $dim(I) = dim(V(I))$.

Teorema .0.12 (Teorema de altura de Krull)**.** *Sea R un anillo conmutativo Noetheriano y sea $I \lhd R$ que puede ser generado por n elementos. Entonces $ht(P) \leq n$ para cada ideal primo minimal de I.[Sharp]*

Definición .0.13. Sea R un anillo conmutativo Noetheriano y sea $I \lhd R$, se define la *altura de* I por
$$ht(I) = min\{ht(P)|P \in Spec(R), \quad I \subseteq P\}$$
Como todo ideal primo en $V(I)$ contiene un ideal primo minimal I y como todo ideal en $Ass(I)$ contiene un ideal primo minimal de I se tiene que
$$\begin{aligned} ht(I) &= min\{ht(P)|P \text{ es ideal primo minimal de } I\} \\ &= min\{ht(P)|P \in Ass(I)\} \end{aligned}$$

Dimensión

Por definición, la dimensión d de una variedad afín V es la máxima longitud de una cadena

$$V_0 \supset V_1 \supset \cdots$$

de distintos cerrados irreducibles (en la topología de Zariski). Entendemos por variedades irreducibles a aquellas que no se puede expresar como la unión de dos subconjuntos propios cerrados.

Corolario .0.14. *[19, Cor. 3.43] Sean V una variedad afín irreducible y Z un subconjunto cerrado maximal irreducible de V. Entonces*

$$dim(Z) = dim(V) - 1.$$

Corolario .0.15. *[19, Cor. 3.44] Sea V una variedad afín irreducible. Toda cadena maximal*

$$V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_d$$

de distintos subconjuntos cerrados irreducibles de V tiene longitud $d = dim(V)$.

Definición .0.16. Una *función regular* sobre V es una aplicación $f : V \to K$ tal que existe un polinomio $p \in K[x_1, ..., x_n]$ con la propiedad de que:

$$p(a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n), \quad \text{para toda } a = (a_1, ..., a_n) \in V$$

Corolario .0.17. *[19, Cor. 3.45] Sea V una variedad afín irreducible, y sean $f_1, ..., f_r$ funciones regulares en V. Toda componente irreducible Z de $V(f_1, ..., f_r)$ tiene codimension a lo más r:*

$$codim(Z) \leq r.$$

Álgebra Homológica

A continuación se muestra algunas relaciones entre categorías por medio de funtores, en particular tomando específicamente a la categoría de R-módulos $\mathcal{M}_R$.

Definición .0.18. Una *cadena de complejos* C de R-módulos es una familia $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de R-módulos, junto con sus aplicaciones tal que cada composición $d_{n-1}\dot{d}_n : C_n \to C_{n-2}$ es cero. Las aplicaciones d_n son llamados *diferenciales de C*. El kernel de d_n es el módulo de *n-ciclos* de C, denotado por $Z_n = Z_n(C)$. La imagen de $d_{n+1} : C_{n+1} \to C_n$ es el módulo de *n-fronteras* de C, denotado por $B_n = B_n(C)$. Como $d_{n-1}\dot{d}_n = 0$ se tiene:

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$$

para todo n. El *n-ésimo módulo de homología* de C es el subcociente $H_n(C) = Z_n/B_n$ de C_n.

Existe una categoría de complejo de cadenas de R-módulos donde los objetos son los complejos de cadenas. Un *morfismo* $u : C \to D$ es una aplicación de complejo de cadenas, es decir, una familia de homomorfismos de R-módulos $u_n : C_n \to D_n$ conmutando con los d_i, en el sentido de que $u_{n-1}d_n = d_{n-1}u_n$. Es decir:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "u_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "u_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "u_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "d_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Una cadena de complejos B recibe el nombre de *subcomplejo* de C si cada B_n es un submódulo C_n y el diferencial en B es la restricción del diferencial en C, es decir, cuando la inclusión $i_n : B_n \subseteq C_n$ constituye una aplicación de cadenas $B \to C$.

Cohomología Local

Definición .0.19. Para cada R-mód M definimos:

$$\Gamma_I(M) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (0 :_M I^n).$$

Es decir, $\Gamma_I(M)$ es el conjunto de elementos de M que se anulan por alguna potencia de I. Como observación, notamos que $\Gamma_I(M)$ es un submódulo de M. Para cualquier homomorfismo $f : M \to N$ de R-módulos se tiene $f(\Gamma_I(M)) \subseteq \Gamma_I(N)$, así que la aplicación $\Gamma_I(f) : \Gamma_I(M) \to \Gamma_I(N)$ se corresponde con f en cada elemento de $\Gamma_I(M)$.

Si $f : M \to N$ y $h : N \to L$ son homomorfismos de R-módulos y $r \in R$, entonces $\Gamma_I(h \circ f) = \Gamma_I(h) \circ \Gamma_I(f)$, $\Gamma_I(f + h) = \Gamma_I(f) + \Gamma_I(h)$, $\Gamma_I(rf) = r\Gamma_I(f)$ y $\Gamma_I(Id_M) = Id_{\Gamma_I(M)}$. Entonces estas igualdades convierten a Γ_I en un funtor R-lineal covariante de $\mathcal{M}_R$ en $\mathcal{M}_R$. Llamamos a Γ_I el *funtor de I-torsíon.*

Lema .0.20 (Local Cohomology, Brodman-Sharp, Lema 1.1.6)**.** *El funtor de I-torsión $\Gamma_I : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_R$ es exacto izquierdo.*

Definición .0.21. Para $i \in \mathbb{N}$ el i-ésimo funtor derivado de Γ_I denotado por H_I^i es el *i-ésimo funtor de cohomología local con soporte en I.*

Definición .0.22. Si aplicamos el funtor H_I^i a un R-mód M, nos referimos a $H_I^i(M)$ como el *i-ésimo módulo de cohomología local de M* con soporte en I. Para $\Gamma_I(M)$ nos referimos como el *submódulo de I-torsión de M.*

Sea M un R-mód arbitrario, para calcular a $H_I^i(M)$ tomamos una resolución inyectiva de M como sigue:

$$I* : 0 \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Aplicamos el funtor Γ_I al complejo $I*$ y obtenemos:

$$\Gamma_I(I*) : 0 \xrightarrow{\Gamma_I(d^{-1})} \Gamma_I(I^0) \xrightarrow{\Gamma_I(d^0)} \Gamma_I(I^1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma_I(I^i) \xrightarrow{\Gamma_I(d^i)} \Gamma_I(I^{i+1}) \longrightarrow \cdots$$

y tomamos el i-ésimo módulo de cohomología local de este complejo, así obtenemos:

$$H_I^i(M) = Ker(\Gamma_I(d^i))/Im(\Gamma_I(d^{i-1})).$$

Bibliografía

[1] M. Barile, *On the Number of Equations Defining Certain Varieties*, Manuscripta Math. 91 (1996), 483-494.

[2] M. Barile, *On ideals whose radical is a monomial ideal*, Comm. Algebra 33 (2005), 4479-4490.

[3] M. Barile, *A note on monomial ideals*, Arch. Math. 87 (2006), no. 6, 516-521.

[4] M. Barile, *On ideals generated by monomials and one binomial*, Algebra Colloq. 14 (2007), no. 4, 631-638.

[5] M. Barile, *Arithmetical ranks of Stanley-Reisner ideals via linear algebra*, Comm. Algebra 36 (2008), no. 12, 4540-4556.

[6] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, Revised Edition, (1997).

[7] D. A. Cox, J. Little y D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Second Ed., Springer, (2005).

[8] D. S. Dummit, R. M. Foote,*Abstract Algebra*, Third Ed, Wiley, (2004).

[9] D. Eisembud and E. G. Evans Jr, *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersuperfaces*, Invent. Math. 19, (1973) 107-112.

[10] R. Hartshorne, *Cohomological dimension of algebraic varieties*, Ann. of Math. 88, (1968), 403-450.

[11] J. Herzog y T. Hibi, *Monomial Ideals*, Springer, (2010).

[12] Sze-Tsen Hu, *Introducción al Álgebra Homológica*, Vinvens-Vives, (1968).

[13] C. Huneke y A. Taylor, *Lectures on local cohomology*, Interactions between homotopy theory and algebra. Summer school, University of Chicago, IL, USA, July 26-August 6, (2004). Contemporary Mathematics 436, American Mathematical Society, Providence, RI, 5199, (2007).

[14] K. Kimura, *Lyubeznik Resolutions and the Arithmetical Rank of Monomial Ideals*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 137, number 11, (2009), 3627-3635.

[15] K. Kimura, N. Terai y K. Yoshida, *Arithmetical rank of squarefree monomial ideals of small arithmetic degree*, J. Algebraic Combin. 29, no. 3, (2009), 389-404.

[16] G. Lyubeznik, *A new explicit finite free Resolution of ideals generated bye Monomials in an R-sequence*, Journal of Pure and Applied Algebra 51, (1988), 193-195.

[17] G. Lyubeznik, *On the arithmetical rank of monomial ideals*, J. Algebra 112, (1988), 86-89.

[18] G. Lyubeznik, *On the local cohomology modules $H^i_{\mathcal{A}}(R)$ for ideals $\mathcal{A}$ generated by monomials in an R-sequence*,"Complete intersections", Lectures Notes in Mathematics Vol. 1092, Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer (1984)

[19] J. S. Milne, *Algebraic Geometry*, Notes on-line, `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AG.pdf`,(2014).

[20] R. Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, Secodn Edition, (2000).

[21] P. Schenzel y W. Voguel, *On set-theoretic intersections*, J. Algebra 48 no. 2, (1977), 401-408.

[22] T. Schmitt y W. Vogel, *Note on set-theoretic intersections of subvarieties of projective space*, Math. Ann. 245 no.3, (1979), 247-253.

[23] B. Singh, *Basic Commutative Algebra*,World Scientific, Singapore, (2011).

[24] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, Reimprendet, (1997).

[25] Z. Yan, *An ètale analog of the Goresky-MacPherson formula for subspace arrangements*, J. Pure Appl. Algebra 146 no. 3, (2000), 305-318.