Universidad Veracruzana

Facultad de Matemáticas

Técnicas no estándar en la Teoría de Punto Fijo: El Teorema de Maurey

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro

en

Ciencias

P R E S E N T A:

Juan Rafael Acosta Portilla

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Carlos Alberto Hernández Linares
Dr. Raquiel Rufino López Martínez

Junio del año 2015 Xalapa, Ver. México

Índice general

Introducción

Dada una función $T : C \to C$, un punto fijo para T es un $x \in X$ tal que $T(x) = x$, el problema de garantizar la existencia de puntos fijos para una función depende de la función y del domino de definición, C, en el presente trabajo se considera el caso en el que C es un subconjunto convexo cerrado y acotado (o convexo, ω-compacto) de un espacio de Banach X.

La Teoría de Punto Fijo se encuentra en la frontera entre la Topología y el Análisis Funcional, esta teoría tiene sus raíces en:

1. El Teorema de Brouwer [11] de 1910, el cual asegura que toda función continua, de un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach finito dimensional en sí mismo, tiene al menos un punto fijo.

2. El Teorema de contracción de Banach [5] de 1922, en el cual se prueba que toda función T continua de un espacio métrico completo en sí mismo con constante de Lipschitz menor que uno, tales operadores son llamados contracciones, tiene un único punto fijo y que además para cualquier x en el espacio métrico la sucesión $(T^n x)$ converge al punto fijo.

La familia de operadores que serán de interés, son aquellos de la forma $T : C \to C$, donde C es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X y T es no expansivo, es decir:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

para cualesquiera $x, y \in C$.

Se dice que un espacio de Banach tiene la propiedad del punto fijo (FPP) si cada operador que satisface las condiciones anteriores tiene un punto fijo. El estudio de estos operadores ha resultado relevante por su relación con los operadores monótonos y acretivos [28, 29], razón por la cual la teoría de punto fijo para operadores no expansivos ha sido considerada como parte fundamental del análisis funcional no lineal.

Los métodos tradicionales para estudiar los operadores no expansivos involucran argumentos de geometría de espacios de Banach y argumentos topológicos, ver [29, 42] y sus referencias.

Pese a que los operadores no expansivos son una extensión natural de las contracciones, su estudio requiere técnicas que van más allá de las aproximaciones puramente métricas. La teoría de punto fijo para operadores no expansivos surge en 1965 con los teoremas de:

1. F. Browder [12] de 1965, el cual garantiza que todo espacio de Hilbert tiene la FPP

2. F. Browder y D. Göhde [31] de 1965, el cual asegura que todo espacio de Banach uniformemente convexo tiene la FPP.

3. W. A. Kirk [41] de 1965, el cual asegura que los espacios de Banach reflexivos con estructura normal tienen la FPP.

Los teoremas que se acaban de mencionar, ponen de manifiesto que la reflexividad parece jugar un papel importante con respecto a la FPP, ya que los espacios de Hilbert y los Uniformemente Convexos son reflexivos, además el último teorema mencionado supone reflexividad.

No todos los espacios de Banach tienen la propiedad del punto fijo, por ejemplo, existe un subconjunto convexo, cerrado y acotado C de ℓ_1 de tal modo que el operador desplazamiento a la derecha (Right Shift Operator) definido de C en C es no expansivo y no tiene puntos fijos [29].

El Teorema de Maurey [52] de 1980, dice que todo subespacio cerrado y reflexivo de $L_1(\mu)$, con μ una medida de probabilidad tiene la FPP. Éste sumado a otros resultados disponibles [42] dieron lugar a conjeturar que la FPP era equivalente a la reflexividad. En el 2008, P. K. Lin [46], mostró un espacio de Banach no reflexivo con la FPP, lo que demuestra que la conjetura es falsa; sin embargo permanece abierta la pregunta si la reflexividad implica la FPP.

El objetivo de esta tesis es probar el Teorema de Muarey y su reciproco el cual se debe a P. N. Dowling y C. J. Lennard [21] en 1997. El Teorema de Maurey será probado utilizando la teoría de ultraproductos, que es una técnica no estándar. Las técnicas no estándar tienen su origen en la Lógica [15], y dan lugar a lo que se conoce como Análisis no Estándar [30], los ultraproductos definidos en Lógica se adecuan para darle la estructura de espacio de Banach [18, 49] requerida. Cabe hacer mención, que la prueba que se abordará será la prueba original dada por Maurey y que existen otras pruebas basadas en técnicas distintas [7, 24]. Además el recíproco del Teorema de Maurey aparece en la literatura para el caso $L_1[0,1]$, sin embargo, no es difícil extender el resultado al caso $L_1(\mu)$, lo cual se hace en el presente trabajo.

Con la finalidad de probar lo mencionado en el párrafo anterior, se organiza el presente trabajo de la siguiente manera:

Capitulo 1: En este capítulo se construyen las técnicas no estándar que son usadas a lo largo del trabajo, en primer lugar se define lo que es un filtro y se prueban propiedades de estos, en particular de los ultrafiltros, posteriormente se define lo que es un límite bajo filtro y se enuncian y prueban diversas propiedades de los mismos, luego se construye el ultraproducto conjuntista y se relaciona a este con las estructuras analíticas, probando la existencia de topologías y medidas en el utraproducto.

Posteriormente se construye el ultraproducto de espacios de Banach, que es la adecuación de la técnica de la lógica aplicada al contexto de espacios de Banach, para finalizar probando una serie de resultados concernientes a subespacios, subconjuntos y operadores en el utraproducto de espacios de Banach.

Capitulo 2: En este capítulo se utilizan las técnicas desarrolladas en el capítulo anterior para probar resultados concernientes al ultraproducto $(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ de espacios concretos, como son los $L_p(\mu)$, mostrando su relación con $L_p(\widetilde{\mu})$, donde $\widetilde{\mu}$ es el ultraproducto de la familia de medidas (μ_i), así como la forma éxplicita de algunos elementos en $L_1(\widetilde{\mu})$, después se define lo que es la representabilidad finita y se demuestra como caracteriza a los ultraproductos.

Luego se da una serie de resultados que asocian la representabilidad finita con la super reflexividad, para continuar con una sección en la que se define lo que es una probabilidad aleatoria y en la que se prueba la existencia de diversos límites de éstas, formas de generarlas a partir de elementos en $L_1(\mu)$ y su relación con las medidas de Young, para finalizar con resultados que asocian límites bajo integrales con integrales bajo las probabilidades aleatorias.

Capitulo 3: Primero se introduce el problema del punto fijo y se muestran ejemplos de espacios y funciones concretos, así como las definiciones elementales que se usan en el presente trabajo, algunas de ellas son la FPP y la τ-FPP, después se definen algunas propiedades geométricas y se demuestran algunos resultados clásicos de puntos fijo como son la existencia de conjuntos minimales, la existencia de a.f.p.s., el

Teorema de Göebel-Karlovitz y la invarianza de dominios, para posteriormente probar el análogo de dichos resultados en el contexto no estándar utilizando las técnicas de los capítulos precedentes.

Finalmente se tiene una sección en la que se definen las bases de Schauder y las copias asintóticamente isométricas de ℓ_1, esta sección es con el objetivo de demostrar el recíproco del Teorema de Maurey, se muestra la relación de las copias asintóticamente isométricas de ℓ_1 con la FPP y se finaliza con el resultado que asegura la existencia de estas en subespacios no reflexivos de $L_1(\mu)$.

Capitulo 4: En primer lugar se demuestra el Teorema de Maurey, posteriormente se demuestra su recíproco y se finaliza dando una serie de definiciones acerca del espacio de Hardy H^1 y una aplicación de las técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores, para dar un resultado de punto fijo en el contexto del espacio de Hardy H^1.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enunciarán algunos resultados concernientes a filtros y ultrafiltros, los cuales serán usados en la construcción del ultraproducto y ultrapotencia conjuntista y de espacios de Banach, para posteriormente probar algunas propiedades de los mismos.

1.1. Filtros y ultrafiltros

Las definiciones que se darán en la presente sección se pueden encontrar en [36, 51, 56].

***Definición* 1** (Filtro). *Un filtro $\mathscr{F}$ en un conjunto I es una colección de subconjuntos de I con las siguientes propiedades:*

1) $\emptyset \notin \mathscr{F}$ *e* $I \in \mathscr{F}$

2) Si $A, B \in \mathscr{F}$ *entonces* $A \cap B \in \mathscr{F}$

3) Si $A \in \mathscr{F}$ *y* $A \subset B \subset I$ *entonces* $B \in \mathscr{F}$

Un filtro puede ser visto como la colección de superconjuntos de secciones finales de una red, razón que motiva la siguiente definición.

***Definición* 2** (Base de filtro). *Una base de filtro $\mathscr{L}$ en un conjunto I es una colección no vacía de subconjuntos de I que satisface:*

1) $\emptyset \notin \mathscr{L}$

2) Si $L_1, L_2 \in \mathscr{L}$ *existe* $L \in \mathscr{L}$ *con* $L \subset L_1 \cap L_2$

Obsérvese que la colección de secciones finales de una red es una base de filtro y que dada una base de filtro $\mathscr{L}$, la colección de superconjuntos de elementos de $\mathscr{L}$ es un filtro, es decir, que la colección $\mathscr{F} = \{A \subset I \,|\, \text{existe } L \in \mathscr{L} \text{ con } L \subset A\}$ es un filtro en I.

Dada una base de filtro $\mathscr{L}$, el *filtro generado* por ésta será la colección de superconjuntos de elementos de la base, tal como se muestra en el ejemplo del párrafo anterior y será denotado por $[\mathscr{L}]$.

Un *filtro* $\mathscr{F}$ en I se dirá que es *principal* si $\mathscr{F} = [\{\{i\}\}]$ para algún $i \in I$, en cuyo caso se dirá que $\mathscr{F}$ es generado por i, obsérvese que $\mathscr{F} = \{A \subset I \,|\, i \in A\}$.

Dada una red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, para cada $\alpha \in I$ considérese $S_\alpha = \{x_\beta \,|\, \beta \geq \alpha\}$, luego el *filtro asociado* a la red es $\mathscr{F}(x_\alpha)_{\alpha\in I} = [\{S_\alpha \,|\, \alpha \in I\}]$.

Dados dos filtros $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ en I, se dirá que $\mathscr{F}$ es más *fino* que $\mathscr{G}$ si $\mathscr{F} \supset \mathscr{G}$.

Si (x_n) es una sucesión y (x_{n_k}) una subsucesión de ésta, entonces $\mathscr{F}(x_{n_k})$ es más fino que $\mathscr{F}(x_n)$, esto se sigue de que $\{x_{n_k} \,|\, k \geq i\} \subset \{x_n \,|\, n \geq n_i\}$.

Si $\mathscr{F}$ es un filtro en I y $A \subset I$ es tal que $A \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathscr{F}$ entonces $\{A \cap F \,|\, F \in \mathscr{F}\}$ es una base de filtro, cuyo filtro generado será llamado la *traza* de $\mathscr{F}$ en A y se escribirá $\mathscr{F}_A$, si $A \in \mathscr{F}$ entonces $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_A$, sin embargo no se puede decir que uno es más fino que el otro ya que no están definidos sobre el mismo conjunto, uno es sobre I y el otro sobre A.

El resultado anterior también vale para redes y subredes, sin embargo la definición de subred no es tan simple como la de subsucesión, siendo ésta una de las razones por las que puede resultar más conveniente el tratar con filtros que con redes.

Se puede probar que la colección $\mathfrak{F}$ de los filtros en I está parcialmente ordenada por la inclusión, además que dada una cadena en $\mathfrak{F}$, ésta tiene una cota superior, a saber la unión de todos los elementos en la cadena, luego por el Lema de Zorn, la colección de todos los filtros en I tiene al menos un elemento maximal.

***Definición* 3** (Ultrafiltro)**.** *Un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en X es un filtro maximal respecto a la contención.*

***Teorema* 1.** *Dado un filtro $\mathscr{U}$ en I son equivalentes:*

1) Para cada $A \subset I$ se tiene que $A \in \mathscr{U}$ o $A^c \in \mathscr{U}$

2) $\mathscr{U}$ *es un ultrafiltro en* I

Demostración: Supóngase 1) y sea $\mathscr{F}$ un filtro más fino que $\mathscr{U}$, supóngase $\mathscr{F}$ es estrictamente más fino que $\mathscr{U}$, es decir, existe $A \subset I$ con $A \in \mathscr{F}$ y $A \notin \mathscr{U}$, luego $A^c \in \mathscr{U}$ de donde $A^c \in \mathscr{F}$ y en consecuencia $\emptyset = A \cap A^c \in \mathscr{F}$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $\mathscr{F} = \mathscr{U}$.

Supóngase 2) y $A \subset I$ con $A \notin \mathscr{U}$, luego A no puede ser un superconjunto de algún elemento de $\mathscr{U}$, esto es que, para cada $U \in \mathscr{U}$ se tiene que $A \not\subset U$, de donde $A^c \cap U \neq \emptyset$, así $\mathscr{U} \cup \{A^c\}$ es una base de filtro y el filtro generado $\mathscr{F}$, es más fino que $\mathscr{U}$ y satisface $A^c \in \mathscr{F}$, luego por la maximalidad de $\mathscr{U}$, se tiene que $\mathscr{F} = \mathscr{U}$ y en consecuencia $A^c \in \mathscr{U}$. ■

La caracterización anterior permite asegurar que todo filtro principal generado por $i \in I$ es un ultrafiltro, esto porque dado $A \subset I$ se tiene que $i \in A$ o $i \in A^c$.

Una pregunta natural es si existen ultrafiltros que no sean principales, la respuesta es afirmativa.

***Teorema* 2.** *Existen ultrafiltros que no son principales.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ llámese $S_n = \{m \,|\, m \geq n\}$, luego $\mathscr{L} = \{S_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de filtro, entonces por el Lema de Zorn existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ más fino que $[\mathscr{L}]$.

Se afirma que $\mathscr{U}$ no es principal, para demostrarlo supóngase que si lo es, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{U} = [\{\{n\}\}]$, luego $\emptyset = \{m \,|\, m \geq n+1\} \cap \{n\} \in \mathscr{U}$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\mathscr{U}$ no es principal. ■

Una propiedad que satisfacen los ultrafiltros y que será de utilidad en lo subsecuente es la siguiente proposición.

***Proposición* 1.** *Sean* $\mathscr{U}$ *un ultrafiltro en* I *y* $A, B \subset I$ *tales que* $A \cup B \in \mathscr{U}$, *entonces* $A \in \mathscr{U}$ *o* $B \in \mathscr{U}$.

Demostración: Si $A, B \notin \mathscr{U}$ entonces $A^c, B^c \in \mathscr{U}$ de donde $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathscr{U}$ así $A \cup B \notin \mathscr{U}$. ■

La proposición anterior, se puede generalizar al caso de uniones finitas y permite dar una caracterización de los ultrafiltros principales y por consiguiente de los que no lo son.

***Teorema* 3.** *Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I entonces son equivalentes:*

1) $\mathscr{U}$ es principal

2) Existe $A \subset I$ finito con $A \in \mathscr{U}$

Demostración: Es claro que 1) implica 2), solo resta probar que 2) implica 1).

Supóngase que existe $\{x_1, \cdots x_n\} = A \subset I$ con $A \in \mathscr{U}$ luego $\bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\} \in \mathscr{U}$ por lo tanto $\{x_{n_0}\} \in \mathscr{U}$ para algún $1 \leq n_0 \leq n$. ■

Del teorema anterior se sigue que todo ultrafiltro sobre un conjunto finito es principal y que los elementos de los ultrafiltros que no son principales necesariamente deben de ser infinitos.

Se dirá que un filtro es *numerablemente incompleto* si existe una sucesión (I_n) en $\mathscr{U}$ tal que $\bigcap_n I_n = \emptyset$.

Se observa que todo ultrafiltro $\mathscr{U}$ en $\mathbb{N}$ que no es principal, contiene las secciones finales de la sucesión identidad en $\mathbb{N}$, es decir, $I_m = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n > m\} \in \mathscr{U}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, esto porque para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que I_m^c es finito y dado que $I_m \cup I_m^c = \mathbb{N}$ entonces $I_m \in \mathscr{U}$, luego como $\bigcap_m I_m = \emptyset$, se concluye que todo ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ que no es principal es numerablemente incompleto.

Obsérvese que siempre que se tenga un filtro $\mathscr{F}$ que es numerablemente incompleto, se puede construir una sucesión decreciente cuya intersección es vacía, es decir, una sucesión (I_n) en $\mathscr{F}$ tal que $I_{n+1} \subset I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_n I_n = \emptyset$.

1.2. Límites sobre filtros

Al igual que con sucesiones y redes, mediante filtros se puede definir la convergencia de una colección.

***Definición* 4** (Límite sobre filtro)**.** *Sea $(x_i)_{i\in I}$ una colección de elementos indizados por I, definida en un espacio topológico Hausdorff X y $\mathscr{F}$ un filtro en I, se dirá que $(x_i)_{i\in I}$ converge a $x \in X$ respecto a $\mathscr{F}$, si para cada U_x vecindad de x se tiene que $\{i \in I \,|\, x_i \in U_x\} \in \mathscr{F}$, en cuyo caso se escribirá $x = \lim_{\mathscr{F}} x_i$ o $x = \lim_{i,\mathscr{F}} x_i$.*

Se pudo definir el límite sobre un filtro en el caso de espacios que no son Hausdorff, sin embargo no se garantizaría la unicidad.

Se han presentado dos notaciones para escribir el límite de una colección $(x_i)_{i\in I}$ respecto a un filtro $\mathscr{F}$ sobre I, a saber $\lim_{\mathscr{F}} x_i$ y $\lim_{i,\mathscr{F}} x_i$, la primera se utilizará siempre que la familia esté indizada por un único parámetro i, mientras que la segunda se utilizará cuando la familia dependa de más de un parámetro, para recalcar respecto a cual se calcula el límite.

Si $\mathscr{F}_A$ es la traza de $\mathscr{F}$ para algún $A \subset I$, entonces se define $\lim_{i\in A,\mathscr{F}} x_i := \lim_{\mathscr{F}_A} x_i$ donde se considera para calcular el límite sobre $\mathscr{F}_A$ la subcolección $(x_i)_{i\in A}$ de $(x_i)_{i\in I}$.

Supóngase bajo las hipótesis de la definición de límite sobre filtro, que $C \subset X$ es cerrado, $(x_i)_{i\in I}$ es convergente bajo $\mathscr{F}$ a x y $\{x_i \,|\, i \in I\} \subset C$, entonces $\lim_{\mathscr{F}} x_i = x \in C$, esto porque para cada U_x vecindad de x se tiene que $\emptyset \neq \{i \in I \,|\, x_i \in U_x\} \in \mathscr{F}$ de donde existe $i_0 \in I$ con $x_{i_0} \in U_x$, es decir $U_x \cap C \neq \emptyset$, luego x es un punto adherente de C, por lo tanto $x \in C$.

Si se está trabajando con varias topologías, entonces cuando se calcule el límite de una colección $(x_i)_{i\in I}$, bajo un filtro $\mathscr{F}$ en I, respecto a una topología τ, se escribirá $\tau - \lim_{\mathscr{F}} x_i$, en particular cuando se considere un espacio de Banach, se denotará $\omega - \lim_{\mathscr{F}} x_i$ al límite respecto a la topología debil y a $\omega^* - \lim_{\mathscr{F}} x_i$ al límite respecto a la topología débil*, el último siempre y cuando de antemano esté fijado un predual.

Los filtros principales brindan poca información acerca de la convergencia ya que si $\mathscr{F} = [\{\{i_0\}\}]$ para algún $i_0 \in I$ entonces $\lim_{\mathscr{F}} x_i = x_{i_0}$, ésto porque para cada $U_{x_{i_0}}$ vecindad de x_{i_0} se tiene que $i_0 \in \{i \in I \,|\, x_i \in U_{x_{i_0}}\}$ de donde $\{i_0\} \subset \{i \in I \,|\, x_i \in U_{x_{i_0}}\} \in \mathscr{F}$.

Las siguientes proposiciones muestran la utilidad de trabajar con ultrafiltros en lugar de filtros.

Proposición 2. *Si (x_n) es una sucesión en un espacio topológico Hausdorff X y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces si (x_n) converge a $x \in X$ se tiene que $x = \lim_{\mathscr{U}} x_n$.*

Demostración: Sea U_x una vecindad de x, entonces como (x_n) converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene que $x_n \in U_x$, dado que $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq N\}$ tiene complemento finito entonces $A \in \mathscr{U}$, así $\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in U_x\} \supset \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq N\} = A \in \mathscr{U}$, de donde $\lim\limits_{\mathscr{U}} x_n = x$. ■

Así las sucesiones convergentes convergen al mismo límite bajo los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ que no son principales, luego los límites bajo filtros son una generalización de los límites usuales.

La convergencia de sucesiones bajo ultrafiltros, garantiza la convergencia fuerte de subsucesiones como se muestra a continuación.

Proposición 3. *Sean (x_n) es una sucesión en un espacio métrico X, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal y supóngase que $\lim\limits_{\mathscr{U}} x_n = x \in X$ existe, entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x = \lim\limits_{k} x_{n_k}$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $I_n = \{m \in \mathbb{N} \,|\, x_m \in B(x, \frac{1}{n})\} \in \mathscr{U}$, luego como $\mathscr{U}$ no es principal, I_n es infinito para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se escoge un $n_1 \in I_1$, luego se define inductivamente una sucesión (n_k) del modo siguiente, para cada $1 \leq l \leq k$ se suponen escogidos índices $n_l \in I_l$, tales que $n_1 < \cdots < n_k$, se observa que $J = I_{k+1} - \{1, \cdots, n_k\}$ es infinito y tiene complemento finito, por lo que $J \in \mathscr{U}$ de donde existe $n_{k+1} \in J$, por construcción $n_{k+1} \in I_{k+1}$ y $n_{k+1} > n_k > \cdots > n_1$.

Así (x_{n_k}) es una subsucesión de (x_n) tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, de donde $\lim\limits_{k} x_{n_k} = x$. ■

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que la convergencia de sucesiones (x_n) bajo ultrafiltros en $\mathbb{N}$ que no son principales, implica la existencia de puntos de acumulación para (x_n).

El siguiente resultado es el análogo al resultado sobre sucesiones el cual asegura que toda subsucesión de una sucesión convergente, tiene el mismo límite que la sucesión.

Proposición 4. *Sea X un espacio topológico Hausdorff, $(x_i)_{i \in I}$ una colección de elementos en X, $\mathscr{F}$ un filtro en I, $A \subset I$ con $A \in \mathscr{F}$ entonces $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i$ existe si y solo si $\lim\limits_{i \in A, \mathscr{F}} x_i$ existe, en este caso $\lim\limits_{i \in A, \mathscr{F}} x_i = \lim\limits_{\mathscr{F}} x_i$.*

Demostración: Si $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i = x$ entonces dada U_x vecindad de x, se tiene que $\{i \in I \,|\, x_i \in U_x\} \in \mathscr{F}$, de donde $\{i \in A \,|\, x_i \in U_x\} = A \cap \{i \in I \,|\, x_i \in U_x\} \in \mathscr{F}_A$, así $\lim\limits_{i\in A,\mathscr{F}} x_i = x$.

Por otra parte, si $\lim\limits_{i\in A,\mathscr{F}} x_i = x$ entonces para cada U_x vecindad de x se tiene que $\{i \in A \,|\, x_i \in U_x\} \in \mathscr{F}_A$, luego $\{i \in A \,|\, x_i \in U_x\} \in \mathscr{F}$ y como $\{i \in I \,|\, x_i \in U_x\} \supset \{i \in A \,|\, x_i \in U_x\}$, se sigue que $\{i \in I \,|\, x_i \in U_x\} \in \mathscr{F}$, se concluye $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i = x$. ■

El siguiente resultado puede ser considerado un recíproco de las Proposiciones 2 y 3.

***Proposición* 5.** *Sean X un espacio métrico, $x \in X$ fijo y (x_n) una sucesión en X, tal que para todo ultrafiltro $\mathscr{U}$ en $\mathbb{N}$ que no es principal, es convergente a x, entonces (x_n) tiene un único punto de acumulación a saber x, más aún, $\lim\limits_{n} x = x$.*

Demostración: Unicidad del punto de acumulación, se toman y_1 y y_2 dos puntos de acumulación de (x_n), entonces existen subsucesiones (x_{n_k}) y (x_{n_s}) tales que $x_{n_k} \to y_1$ y $x_{n_s} \to y_2$, se consideran los conjuntos $I_1 = \{n_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ e $I_2 = \{n_s \,|\, s \in \mathbb{N}\}$, luego para $i = 1, 2$, las familias $\mathscr{L}_i = \{A \subset \mathbb{N} \,|\, I_i \subset A\}$ son bases de filtro y se pueden extender a ultrafiltros $\mathscr{U}_i$.

De las Proposiciones 2 y 4, se sigue que $y_1 = \lim\limits_{k} x_{n_k} = \lim\limits_{n\in I_1,\mathscr{U}_1} x_n = \lim\limits_{\mathscr{U}_1} x_n = x$ $= \lim\limits_{\mathscr{U}_2} x_n = \lim\limits_{n\in I_2,\mathscr{U}_2} x_n = \lim\limits_{s} x_{n_s} = y_2$.

Para demostrar que (x_n) es convergente, se considera (x_{n_k}) subsucesión, se toma $I = \{n_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ y se considera un ultrafiltro $\mathscr{U}$ tal que contiene a la base de filtro $\{A \subset \mathbb{N} \,|\, I \subset A\}$, de la Proposición 4 se sigue $\lim\limits_{n\in I,\mathscr{U}} x_n = \lim\limits_{\mathscr{U}} x_n = x$, entonces por la Proposición 3, existe una subsucesión $(x_{n_{k_s}})$ de (x_{n_k}) que converge a x, de donde $\lim\limits_{n} x_n = x$. ■

El siguiente teorema garantiza la convergencia de colecciones respecto a ultrafiltros en cierta familia de espacios topológicos.

***Teorema* 4.** *Sea K un espacio topológico, entonces son equivalentes:*

1) *K es compacto*

2) *Para cada $(x_i)_{i\in I}$ familia en K y ultrafiltro $\mathscr{U}$ en I, se tiene que (x_i) converge respecto a $\mathscr{U}$*

Demostración: Se probará que 1) implica 2), sean K compacto, $(x_i)_{i\in I}$ en K con $\mathscr{U}$ ultrafiltro en I y supóngase que (x_i) no converge respecto a $\mathscr{U}$, entonces para cada $y \in K$ existe U_y vecindad de y tal que $\{i \in I \,|\, x_i \in U_y\} \notin \mathscr{U}$, luego $\{U_y \,|\, y \in K\}$ es una cubierta abierta de K que admite una subcubierta finita

$\{U_{y_1}, \cdots, U_{y_n}\}$, así $\displaystyle\bigcup_{r=1}^{n}\{i \in I \,|\, x_i \in U_{y_r}\} = \{i \in I \,|\, x_i \in K\} = I \in \mathscr{U}$ por lo que $\{i \in I \,|\, x_i \in U_{y_{r_0}}\} \in \mathscr{U}$ para algún $1 \leq r_0 \leq n$ lo cual es una contradicción.

Ahora se demostrará que 2) implica 1), sea $\mathfrak{F} = \{F_i \,|\, i \in I\}$ una familia de subconjuntos de K con la propiedad de la intersección finita, se busca demostrar que $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, para ello llámese Γ a la colección de subconjuntos finitos de I, luego por cada elemento $A \in \Gamma$ tómese un elemento $x_A \in \displaystyle\bigcap_{i\in A} F_i$ y sea $\beta(A) = \{B \supset A \,|\, B \in \Gamma\}$, ya que $\beta(A) \neq \emptyset$ y $\beta(A) \cap \beta(B) \supset \beta(A \cup B)$, se deduce que la colección $\mathfrak{B} = \{\beta(A) \,|\, A \in \Gamma\}$ es una base de filtro en Γ, de donde se puede extender a un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en Γ, sea $(x_A)_{A\in\Gamma}$ la familia construida, por hipótesis converge a $\lim\limits_{\mathscr{U}} x_A = x \in K$, basta probar que $x \in \displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i$, supóngase lo contrario, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \notin F_{i_0}$, como F_{i_0} es cerrado existe una vecindad U_x de x de tal modo que $U_x \cap F_{i_0} = \emptyset$, como $x = \lim\limits_{\mathscr{U}} x_A$ se sigue que $\{A \in \Gamma \,|\, x_A \in U_x\} \in \mathscr{U}$ y puesto que $\{i_0\} \in \Gamma$, se tiene que $\emptyset \neq \beta(\{i_0\}) \cap \{A \in \Gamma \,|\, x_A \in U_x\} \in \mathscr{U}$ y existe $B_0 \in \beta(\{i_0\}) \cap \{A \in \Gamma \,|\, x_A \in U_x\} \in \mathscr{U}$, entonces dado que para cada $B \in \beta(\{i_0\}) \cap \{A \in \Gamma \,|\, x_A \in U_x\}$ se tiene $x_B \in U_x$ y $x_B \in \displaystyle\bigcap_{i\in B} F_B \subset F_{i_0}$, se concluye que $x_{B_0} \in U_x$ y $x_{B_0} \in F_{i_0}$ lo cual es una contradicción.
$\blacksquare$

Una consecuencia de los resultados anteriores es el siguiente corolario.

***Corolario* 1.** *Sea (x_n) una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces* $\liminf x_n \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} x_n \leq \limsup x_n$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, $r = \liminf x_n$ y $s = \limsup x_n$, luego solo una cantidad finita de términos de (x_n) no pertenecen a $[r - \epsilon, s + \epsilon]$, se considera $N = \max\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \notin [r - \epsilon, s + \epsilon]\}$, entonces $I_0 = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n > N\} \in \mathscr{U}$, de donde $\lim\limits_{\mathscr{U}} x_n = \lim\limits_{\mathscr{U}_{I_0}} x_n \in [r - \epsilon, s + \epsilon]$, es decir $r - \epsilon \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} x_n \leq s + \epsilon$, al ser $\epsilon > 0$ cualquiera, se concluye $\liminf x_n \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} x_n \leq \limsup x_n$. $\blacksquare$

Los límites de colecciones bajo filtros se comportan prácticamente igual que los límites sucesionales como lo muestran las siguientes proposiciones.

***Proposición* 6.** *Sean X y Y dos espacios topológicos Hausdorff y $f : X \to Y$ una función, entonces son equivalentes:*

1) f *es continua en* x

2) $f(x) = \lim\limits_{\mathscr{F}} f(x_i)$ *para toda familia* $(x_i)_{i\in I}$ *en* X *y* $\mathscr{F}$ *filtro en* I *tal que* $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i = x$

Como consecuencia inmediata se tiene que $(\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i)^2 = \lim\limits_{\mathscr{F}} x_i^2$ y $\|\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i\| = \lim\limits_{\mathscr{F}} \|x_i\|$ siempre que tengan sentido las expresiones.

Los límites bajo filtros también son compatibles con las funciones semicontinuas inferiormente y superiormente como se muestra a continuación.

Proposición 7. *Sean* $(x_i)_{i\in I}$ *una colección en un espacio topológico Hausdorff y* $\mathscr{F}$ *un filtro en* I*, tales que* $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i$ *existe, entonces:*

1) Si φ *es una función semicontinua inferiormente se cumple* $\varphi(\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i) \leq \lim\limits_{\mathscr{F}} \varphi(x_i)$

2) Si φ *es una transformación semicontinua superiormente se tiene que* $\varphi(\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i) \geq \lim\limits_{\mathscr{F}} \varphi(x_i)$

En el entendido de que los límites se calculan en la compactificación de $\mathbb{R}$ *dada al añadir los puntos al infinito* $-\infty$ *e* ∞*.*

Demostración: Solo se efectuará la demostración del inciso 1) ya que la del inciso 2) es análoga.

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $I' \in \mathscr{F}$ tal que $\varphi(x_i) < \lim\limits_{\mathscr{F}} \varphi(x_i) + \epsilon$ para todo $i \in I'$, así $x_i \in \varphi^{-1}((-\infty, \lim\limits_{\mathscr{F}} \varphi(x_i) + \epsilon])$ para todo $i \in I'$, como φ es semicontinua inferiormente, entonces el conjunto $\varphi^{-1}((-\infty, \lim\limits_{\mathscr{F}} \varphi(x_i) + \epsilon])$ es cerrado, de donde $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i \in \varphi^{-1}((-\infty, \lim\limits_{\mathscr{F}} \varphi(x_i) + \epsilon])$, es decir $\varphi(\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i) \leq \lim\limits_{\mathscr{F}} \varphi(x_i) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, así $\varphi(\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i) \leq \lim\limits_{\mathscr{F}} \varphi(x_i)$. $\blacksquare$

En la siguientes proposición se dan por hecho las definiciones básicas sobre espacios vectoriales topológicos, las cuales se pueden encontrar en [17, 54].

Proposición 8. *Sean* X *un espacio vectorial topológico Hausdorff,* $(x_i)_{i\in I}$ *y* $(y_i)_{i\in I}$ *dos familias de vectores en* X*,* $(\lambda_i)_{i\in I}$ *una colección de escalares,* $\mathscr{F}$ *un filtro en* I *y* $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i = x$*,* $\lim\limits_{\mathscr{F}} y_i = y$*,* $\lim\limits_{\mathscr{F}} \lambda_i = \lambda$ *entonces:*

1) $\lim\limits_{\mathscr{F}} (x_i + y_i) = x + y$

2) $\lim\limits_{\mathscr{F}} \lambda_i x_i = \lambda x$

Demostración: 1) Sea U_{x+y} una vecindad de $x+y$, como $+$ es continua, existe una vecindad básica $U_x \times U_y$ con U_x vecindad de x y U_y vecindad de y tal que $+(U_x \times U_y) \subset U_{x+y}$, es decir $U_x + U_y \subset U_{x+y}$.

Como $\{i \in I \mid x_i \in U_x\}, \{i \in I \mid y_i \in U_y\} \in \mathscr{F}$ entonces $A = \{i \in I \mid x_i \in U_x\} \cap \{i \in I \mid y_i \in U_y\} \in \mathscr{F}$ luego $x_i + y_i \in U_x + U_y \subset U_{x+y}$ para todo $i \in A$ y dado que $B = \{i \in I \mid x_i + y_i \in U_{x+y}\} \supset A$ se tiene que $B \in \mathscr{F}$, así $\lim\limits_{\mathscr{F}} (x_i + y_i) = x + y$.

2) Sea $U_{\lambda x}$ una vecindad de λx, por la continuidad del producto escalar existen U_x vecindad de x y U_λ vecindad de λ tales que $\cdot(U_\lambda \times U_x) \subset U_{\lambda x}$, luego ya que $I_1 = \{i \in I \mid x_i \in U_x\} \in \mathscr{F}$ e $I_2 = \{i \in I \mid \lambda_i \in U_\lambda\} \in \mathscr{F}$ entonces $\{i \in I \mid \lambda_i x_i \in U_{\lambda x}\} \supset \{i \in I \mid \lambda_i \in U_\lambda, x_i \in U_x\} = I_1 \cap I_2 \in \mathscr{F}$, por lo tanto $\{i \in I \mid \lambda_i x_i \in U_{\lambda x}\} \in \mathscr{F}$, así $\lim\limits_{\mathscr{F}} \lambda_i x_i = \lambda x$. ■

En la próxima proposición se suponen las definiciones y algunos resultados de retículos de Banach los cuales se pueden consultar en [8, 17].

***Proposición* 9.** *Sean X un retículo de Banach, $(x_i)_{i \in I}$ una colección en X tal que $x_i \geq 0$ para cada $i \in I$, $\mathscr{F}$ un filtro en I y $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i = x$, entonces $x \geq 0$.*

Demostración: Ya que en todo retículo de Banach X el cono positivo X^+ es un conjunto cerrado, se sigue por una observación dada inmediatamente de la definición de límite bajo filtro que $x = \lim\limits_{\mathscr{F}} x_i \in X^+$, es decir $x \geq 0$. ■

El resultado anterior asegura que si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in I_0 \in \mathscr{F}$ filtro en I, entonces $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_i \leq \lim\limits_{\mathscr{F}} y$.

1.3. Ultraproducto conjuntista

Considérese una familia de conjuntos $(X_i)_{i \in I}$ y un filtro $\mathscr{F}$ en I, entonces se define una relación $\sim_{\mathscr{F}}$ en $\prod\limits_{i \in I} X_i$ mediante: $(x_i) \sim_{\mathscr{F}} (y_i)$ si $\{i \in I \mid x_i = y_i\} \in \mathscr{F}$.

***Lema* 1.** *La relación $\sim_{\mathscr{F}}$ es una relación de equivalencia.*

Demostración: La reflexividad y simetría son directas de la definición, solo se probará la transitividad.

Sean $(x_i),(y_i),(z_i) \in \prod\limits_{i\in I} X_i$ tales que $(x_i) \sim_{\mathscr{F}} (y_i)$ y $(y_i) \sim_{\mathscr{F}} (x_i)$ entonces $\{i \in I \mid x_i = z_i\} \supset \{i \in I \mid x_i = y_i\} \cap \{i \in I \mid y_i = z_i\} \in \mathscr{F}$. ■

El lema anterior permite definir el producto reducido.

***Definición* 5** (Producto reducido)**.** *Sean $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos y $\mathscr{F}$ un filtro en I, se define el producto reducido $(X_i)_{\mathscr{F}} = \prod\limits_{i\in I} X_i \big/ \sim_{\mathscr{F}}$*

Si $(x_i) \in \prod\limits_{i\in I} X_i$, su clase de equivalencia en el producto reducido es $\widetilde{(x_i)}_{\mathscr{F}}$ ó $\widetilde{(x_i)}$.

Si $A_i \subset X_i$ y $A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$ entonces $\widetilde{(A_i)}_{\mathscr{F}} = \{\widetilde{(x_i)}_{\mathscr{F}} \in (X_i)_{\mathscr{F}} \mid \text{existe } (x_i) \in \widetilde{(x_i)}_{\mathscr{F}}$ con $x_i \in A_i$ para cada $i \in I\}$, si $A_i = \emptyset$ para algún $i \in I$, hay tres posibilidades excluyentes, $J = \{i \in I \mid A_i \neq \emptyset\} \in \mathscr{F}$ ó $J^c = \{i \in I \mid A_i = \emptyset\} \in \mathscr{F}$ ó $J, J^c \notin \mathscr{F}$, luego se define:

$$\widetilde{(A_i)}_{\mathscr{F}} = \begin{cases} \widetilde{(A'_i)}_{\mathscr{F}} & \text{, si } J \in \mathscr{F}\text{, donde } A'_i = A_i \text{ si } i \in J \text{ y } A_i = X_i \text{ si } i \in J^c \\ \emptyset & \text{, si } J^c \in \mathscr{F} \\ \text{No está definido} & \text{, si } J, J^c \notin \mathscr{F} \end{cases}$$

Obsérvese que si $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro, entonces $J \in \mathscr{F}$ ó $J^c \in \mathscr{F}$, por lo que $\widetilde{(A_i)}_{\mathscr{F}}$ siempre está definido, además $(A_i)_{\mathscr{U}} = \emptyset$ es equivalente a $\{i \in I \mid A_i = \emptyset\} \in \mathscr{U}$.

Si $A_i \subset X_i$ para cada $i \in I$, entonces, siempre que esté definido, se puede considerar $(A_i)_{\mathscr{F}}$ encajado en $(X_i)_{\mathscr{F}}$ asociando al primero el conjunto $\widetilde{(A_i)}_{\mathscr{F}} \subset (X_i)_{\mathscr{F}}$.

***Definición* 6** (Ultraproducto)**.** *Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de conjuntos y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en I, entonces el producto reducido $(X_i)_{\mathscr{U}}$ es llamado ultraproducto, si además $X_i = X$ para cada $i \in I$, entonces $(X)_{\mathscr{U}} = (X_i)_{\mathscr{U}}$ es llamada ultrapotencia.*

Una ventaja que brinda el trabajar con ultraproductos y no solo con productos reducidos, es que los primeros son compatibles con las operaciones usuales de conjuntos como lo muestra la siguiente proposición.

***Proposición* 10.** *Sean $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ dos familias indizadas de conjuntos y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I, entonces considerando $A_i, B_i \subset A_i \cup B_i$ para cada $i \in I$ se tiene:*

1) $(A_i)_{\mathscr{U}} \cup (B_i)_{\mathscr{U}} = (A_i \cup B_i)_{\mathscr{U}}$

2) $(A_i)_{\mathscr{U}} \cap (B_i)_{\mathscr{U}} = (A_i \cap B_i)_{\mathscr{U}}$

3) $(A_i)_{\mathscr{U}} - (B_i)_{\mathscr{U}} = (A_i - B_i)_{\mathscr{U}}$

Demostración: 1) Sea $\widetilde{(x_i)} \in (A_i)_{\mathscr{U}} \cup (B_i)_{\mathscr{U}}$, luego $\widetilde{(x_i)} \in (A_i)_{\mathscr{U}}$ ó $\widetilde{(x_i)} \in (B_i)_{\mathscr{U}}$, supóngase $\widetilde{(x_i)} \in (A_i)_{\mathscr{U}}$, de donde existe $(x_i') \in \widetilde{(x_i)}$ con $x_i' \in A_i \cup B_i$ para cada $i \in I$ tal que $x_i' \in A_i$ si $A_i \neq \emptyset$, así $\widetilde{(x_i)} = \widetilde{(x_i')} \in (A_i \cup B_i)_{\mathscr{U}}$.

Por otra parte tómese $\widetilde{(x_i)} \in (A_i \cup B_i)_{\mathscr{U}}$, luego considérense los conjuntos $I_A = \{i \in I \,|\, x_i \in A_i\}$ e $I_B = \{i \in I \,|\, x_i \in B_i\}$, dado que $I_A \cup I_B = I \in \mathscr{U}$, entonces por ser $\mathscr{U}$ un ultrafiltro, se tiene que $I_A \in \mathscr{U}$ o $I_B \in \mathscr{U}$, supóngase $I_A \in \mathscr{U}$ y para cada $i \notin I_A$ escójase un $y_i \in A_i \cup B_i$ de tal modo que $y_i \in A_i$ cuando $A_i \neq \emptyset$, luego la colección (x_i') dada por:

$$x_i' = \begin{cases} x_i & , \text{si } i \in I_A \\ y_i & , \text{si } i \notin I_A \end{cases}$$

satisface $\widetilde{(x_i')} \in (A_i)_{\mathscr{U}}$ y $(x_i') \in \widetilde{(x_i)}$, de donde $\widetilde{(x_i)} = \widetilde{(x_i')} \in (A_i)_{\mathscr{U}}$.

2) Sea $\widetilde{(x_i)} \in (A_i)_{\mathscr{U}} \cap (B_i)_{\mathscr{U}}$ entonces $\widetilde{(x_i)} \in (A_i)_{\mathscr{U}}$ y $\widetilde{(x_i)} \in (B_i)_{\mathscr{U}}$, luego existen $(x_i^1), (x_i^2) \in \widetilde{(x_i)}$ con $x_i^1 \in A_i$ y $x_i^2 \in B_i$ para cada $i \in I$, luego $I_0 = \{i \in I \,|\, x_i^1 \in A_i \cap B_i\} \supset \{i \in I \,|\, x_i^1 = x_i^2\} \in \mathscr{U}$ de donde $I_0 \in \mathscr{U}$, para cada $i \notin I_0$ se escoge $y_i \in A_i \cup B_i$ de tal modo que $y_i \in A_i \cap B_i$ cuando $A_i \cap B_i \neq \emptyset$, se define:

$$x_i' = \begin{cases} x_i^1 & , \text{si } i \in I_0 \\ y_i & , \text{si } i \notin I_0 \end{cases}$$

Por construcción $\widetilde{(x_i')} \in (A_i \cap B_i)_{\mathscr{U}}$, además $\{i \in I \,|\, x_i' = x_i^1\} \supset I_0 \in \mathscr{U}$, por lo que $\widetilde{(x_i)} = \widetilde{(x_i^1)} = \widetilde{(x_i')} \in (A_i \cap B_i)_{\mathscr{U}}$.

Si $\widetilde{(x_i)} \in (A_i \cap B_i)_{\mathscr{U}}$ entonces existe $(x_i') \in \widetilde{(x_i)}$ con $x_i' \in A_i \cup B_i$ tal que $x_i' \in A_i \cap B_i$ cuando $A_i \cap B_i \neq \emptyset$, luego $\widetilde{(x_i)} = \widetilde{(x_i')} \in (A_i)_{\mathscr{U}} \cap (B_i)_{\mathscr{U}}$.

3) Se omite porque su prueba es muy semejante a las dos anteriores. ■

Los siguientes lemas son consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Lema 2. *Sea* $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos y* $\mathscr{U}$ *un ultrafiltro en* I*, entonces* $\widetilde{\tau}_0 = \{(U_i)_{\mathscr{U}} \,|\, U_i \in \tau_i\}$ *es una base para una topología en* $(X_i)_{\mathscr{U}}$*.*

Lema 3. *Sea* $(\Omega_i, \sigma_i)_{i\in I}$ *una familia de álgebras y* $\mathscr{U}$ *un ultrafiltro en* I*, entonces la familia* $\widetilde{\sigma}_0 = \{(A_i)_{\mathscr{U}} \,|\, A_i \in \sigma_i\}$ *es un álgebra en* $(\Omega_i)_{\mathscr{U}}$*.*

Ya que el ultraproducto de espacios topológicos y de álgebras de conjuntos se puede dotar de la misma estructura, entonces resulta natural buscar darle estructura de espacio de medida al ultraproducto de espacios de medida.

Considérese $(\Omega_i, \mu_i, \sigma_i)_{i\in I}$ una familia de espacios de medida tales que $\sup\limits_{i\in I}\mu_i(\Omega_i) < M < \infty$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I, entonces se define $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i)$ para cada $\widetilde{A} = (A_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}_0$, luego tiene sentido la siguiente proposición.

***Proposición* 11.** *La función $\widetilde{\mu}$ está bien definida en $\widetilde{\sigma}_0$, es aditiva, σ-subaditiva, σ-finita, luego puede ser extendida de forma única a la mínima σ-álgebra $\widetilde{\sigma}$ que contiene a $\widetilde{\sigma}_0$.*

Demostración: La aditividad, σ-subaditividad y σ-finitud, sumadas a que $\widetilde{\mu}(\emptyset) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(\emptyset) = 0$, son las hipótesis del Teorema de Caratheodory, luego la existencia de una medida y su unicidad quedan garantizadas si se prueban las primeras.

Primero se probará que $\widetilde{\mu}((A_i)_{\mathscr{U}})$ existe, como $\sup\limits_{i\in I}\mu_i(\Omega_i) < M < \infty$ entonces $\mu_i(A_i) \leq \mu_i(\Omega_i) \in [0, M]$ para todo $A_i \in \sigma_i$, luego dado que $[0, M]$ es compacto, se sigue que $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i)$ existe para todo $\widetilde{A} = (A_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}_0$.

La función $\widetilde{\mu}$ está bien definida, considérense $\widetilde{A} = (A_i)_{\mathscr{U}} = (B_i)_{\mathscr{U}} = \widetilde{B}$, luego $\emptyset = (A_i)_{\mathscr{U}} - (B_i)_{\mathscr{U}} = (A_i - B_i)_{\mathscr{U}}$ de donde $I_0 = \{i \in I \,|\, A_i - B_i = \emptyset\} \in \mathscr{U}$, así $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) - \widetilde{\mu}(\widetilde{B}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i) - \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(B_i) = \lim\limits_{i\in I_0,\mathscr{U}} \mu_i(A_i - B_i) = \lim\limits_{i\in I_0,\mathscr{U}} \mu_i(\emptyset) = 0$.

Se demostrará la aditividad de $\widetilde{\mu}$, sean $\widetilde{A} = (A_i)_{\mathscr{U}}, \widetilde{B} = (B_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}_0$ ajenos, entonces como $\emptyset = (A_i)_{\mathscr{U}} \cap (B_i)_{\mathscr{U}} = (A_i \cap B_i)_{\mathscr{U}}$ se tiene que $I_0 = \{i \in I \,|\, A_i \cap B_i = \emptyset\} \in \mathscr{U}$, luego para todo $i \in I_0$ se satisface $\mu_i(A_i \cup B_i) = \mu_i(A_i) + \mu_i(B_i)$ de donde $\widetilde{\mu}(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i \cup B_i) = \lim\limits_{i\in I,\mathscr{U}} (\mu_i(A_i) + \mu_i(B_i)) = \widetilde{\mu}(\widetilde{A}) + \widetilde{\mu}(\widetilde{B})$.

Además $\widetilde{\mu}$ es σ-finita, de hecho es finita por el mismo argumento usado para probar la existencia.

Se mostrará que $\widetilde{\mu}$ es σ-subaditiva, puesto que $\widetilde{\mu}$ es aditiva, basta probar que para cada $\epsilon > 0$, $\widetilde{A}, \widetilde{A_1}, \dots \in \widetilde{\sigma}_0$ con $\widetilde{A} = (A_i)_{\mathscr{U}}, \widetilde{A_k} = (A_i^k)_{\mathscr{U}}$, $\widetilde{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{A_k}$ y $\widetilde{A_k} \cap \widetilde{A_n} = \emptyset$ si $k \neq n$ se tiene que $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(\widetilde{A_k}) + \epsilon$.

Ya que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple $\mu_i(\widetilde{A_k}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu(A_i^k)$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $I_k = \{i \in I \mid \mu_i(A_i^k) < \widetilde{\mu}(\widetilde{A_k}) + \frac{\epsilon}{2^k}\} \in \mathscr{U}$, entonces se define para cada $k \in \mathbb{N}$.

$$B_i^k = \begin{cases} A_i^k & \text{, si } i \in I_k \\ \emptyset & \text{, si } i \notin I_k \end{cases}$$

Dado que $\{i \in I \mid A_i^k = B_i^k\} = I_k \in \mathscr{U}$ entonces $(A_i^k)_{\mathscr{U}} = (B_i^k)_{\mathscr{U}}$, luego considérese $k \in \mathbb{N}$ fijo, entonces si $i \in I_k$ se tiene $\mu_i(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_i^k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_i(B_i^k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\widetilde{\mu}(\widetilde{A_k}) + \dfrac{\epsilon}{2^k})$, mientras que si $i \notin I_k$, entonces $\mu_i(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_i^k) = \mu_i(\emptyset) = 0 \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\widetilde{\mu}(\widetilde{A_k}) + \dfrac{\epsilon}{2^k})$, por lo tanto $\widetilde{\mu}(\widetilde{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_i^k}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_i^k) \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} (\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\widetilde{\mu}(\widetilde{A_k}) + \dfrac{\epsilon}{2^k})) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{\mu}(\widetilde{A_k}) + \epsilon$.

Como $\widetilde{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{A_k} \subset (\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_i^k)_{\mathscr{U}}$ y $\widetilde{\mu}$ es monótona dado que es aditiva, entonces $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) \leq \widetilde{\mu}(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_i^k)_{\mathscr{U}} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{\mu}(\widetilde{A_k}) + \epsilon$. ■

Se observa que en la proposición anterior, la σ-subaditividad implica la aditividad siempre que la unión sea un elemento de $\widetilde{\sigma}_0$, es decir, si $\widetilde{E}, \widetilde{E_1}, \dots \in \widetilde{\sigma}_0$, $\widetilde{E_n} \cap \widetilde{E_m} = \emptyset$ y $\widetilde{E} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{E_n}$, entonces $\widetilde{\mu}(\widetilde{E}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{\mu}(\widetilde{E_n})$.

***Teorema* 5.** *Si $(\Omega_i, \mu_i, \sigma_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios de medida compleja tales que $\sup\limits_{i\in I}|\mu_i|(\Omega_i) < M < \infty$ y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en I, entonces la función $\widetilde{\mu}((A_i)_{\mathscr{U}}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i)$ definida en $\widetilde{\sigma}_0$ está bien definida, es aditiva y admite una única extensión a $\widetilde{\sigma}$ la mínima σ-álgebra que contiene a $\widetilde{\sigma}_0$, además $|\widetilde{\mu}|((A_i)_{\mathscr{U}}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i|(A_i)$ para cada $(A_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}_0$, luego la variación del ultraproducto es el ultraproducto de las variaciones.*

Demostración: Puesto que cada μ_i es una medida, entonces admite una descomposición de la forma $\mu_i = \nu_i^+ - \nu_i^- + i(\eta_i^+ - \eta_i^-)$ donde ν_i^+ y ν_i^- son las partes positiva y negativa de la parte real de μ_i y η_i^+, η_i^- son las partes positiva y negativa de la parte imaginaria de μ_i, luego por la proposición anterior, ya que las cuatro funciones que descomponen a μ_i son medidas positivas,entonces admiten extensiones $\widetilde{\nu}^+$, $\widetilde{\nu}^-$, $\widetilde{\eta}^+$ y $\widetilde{\eta}^-$ a $\widetilde{\sigma}$ respectivamente.

Ya que $\widetilde{\mu}((A_i)_{\mathscr{U}}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i) = \lim\limits_{\mathscr{U}} (\nu_i^+(A_i) - \nu_i^-(A_i) + i(\eta_i^+(A_i) - \eta_i^-(A_i))) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \nu_i^+(A_i) - \lim\limits_{\mathscr{U}} \nu_i^-(A_i) + i(\lim\limits_{\mathscr{U}} \eta_i^+(A_i) - \lim\limits_{\mathscr{U}} \eta_i^-(A_i)) = \widetilde{\nu}^+((A_i)_{\mathscr{U}}) - \widetilde{\nu}^-((A_i)_{\mathscr{U}}) + i(\widetilde{\eta}^+((A_i)_{\mathscr{U}}) - \widetilde{\eta}^-((A_i)_{\mathscr{U}}))$, entonces $\widetilde{\nu}^+ - \widetilde{\nu}^- + i(\widetilde{\eta}^+ - \widetilde{\eta}^-)$ es una medida en $\widetilde{\sigma}$ que extiende a $\widetilde{\mu}$.

Para probar la unicidad de la extensión, por [43] basta probar que $\widetilde{\mu}$ es σ-aditiva en $\widetilde{\sigma}_0$ y esto se tiene ya que $\widetilde{\mu} \equiv \widetilde{\nu}^+ - \widetilde{\nu}^- + i(\widetilde{\eta}^+ - \widetilde{\eta}^-)$ en $\widetilde{\sigma}_0$ y cada una de las funciones del lado derecho de la igualdad es σ-aditiva.

Para mostrar que la variación del ultraproducto $|\widetilde{\mu}|$ es igual al ultraproducto de las variaciones $\widetilde{\tau}$ tal que $\widetilde{\tau}((A_i)_{\mathscr{U}}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i|(A_i)$, por [43] es suficiente demostrar que $|\widetilde{\mu}|((A_i)_{\mathscr{U}}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i|(A_i)$ para todo $(A_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}_0$.

Recuérdese que:

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(B_n)| : (B_n) \text{ es partición numerable de } A \text{ con } B_n \in \sigma\}$$

Luego sea $\widetilde{A} = (A_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}_0$ y $(\widetilde{B}_n)$ partición numerable de $\widetilde{A}$ con $B_i^n \in \sigma_i$ y $\widetilde{B}_n = (B_i^n)_{\mathscr{U}}$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\widetilde{\mu}(\widetilde{B}_n)| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i(B_i^n)| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i|(B_i^n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{\tau}(\widetilde{B}_n)$ $= \widetilde{\tau}(\widetilde{A})$, así $|\widetilde{\mu}| \leq \widetilde{\tau}$ en $\widetilde{\sigma}_0$.

Para demostrar la desigualdad restante se considera $\epsilon > 0$, entonces para cada $i \in I$ existe una partición numerable (B_i^n) de A_i tal que $|\mu_i|(A_i) - \epsilon < \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)|$ $\leq |\mu_i|(A_i)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera $\widetilde{B}_n = (B_i^n)_{\mathscr{U}}$.

Se observa que la familia $\{\widetilde{B}_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es ajena por parejas y su unión $\widetilde{B} = \bigcup\limits_{n} \widetilde{B}_n$ es un subconjunto de $\widetilde{A} \cdots (1)$.

Para dar prueba de ello, si $m \neq n$ entonces $\widetilde{B}_m \cap \widetilde{B}_n = (B_i^m)_{\mathscr{U}} \cap (B_i^n)_{\mathscr{U}} = (B_i^m \cap B_i^n)_{\mathscr{U}}$ $= (\emptyset)_{\mathscr{U}} = \emptyset$, así $\{\widetilde{B}_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es ajeno por parejas.

Se toma $\widetilde{(x_i)} \in \widetilde{B}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{(x_i)} \in \widetilde{B}_n$, de donde, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $x_i \in B_i^n \subset A_i$, por lo tanto $\widetilde{(x_i)} \in \widetilde{A}$ y en consecuencia $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$.

Además se tiene que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i(B_i^n)| \cdots (2)$.

Se demostrará (2), dado $N \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene $\lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=1}^{N} |\mu_i(B_i^n)| = \sum\limits_{n=1}^{N} \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i(B_i^n)|$ y $\sum\limits_{n=1}^{N} |\mu_i(B_i^n)| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)|$, luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i(B_i^n)| \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)|$.

Ya que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=1}^{N} |\mu_i(B_i^n)| \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i(B_i^n)|$ cuando $N \to \infty$, entonces para demostrar la igualdad, basta probar que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=1}^{N} |\mu_i(B_i^n)| \to \lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)|$ cuando $N \to \infty$.

Dado $\delta > 0$, sin pérdida de generalidad, mediante la construcción que se empleó en la prueba de la Proposición 11, se pueden suponer representantes $(C_i^n) \in \widetilde{B}_n$ tales que para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene $\widetilde{\tau}(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} C_i^n) \leq \sum\limits_{n=N}^{\infty} \widetilde{\tau}(\widetilde{B}_n) + \delta$, luego $|\lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)| - \lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=1}^{N} |\mu_i(B_i^n)|| = \lim\limits_{\mathscr{U}} (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)| - \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)|) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=N}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)| \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=N}^{\infty} |\mu_i|(B_i^n)$

$= \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i|(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} B_i^n) = \widetilde{\tau}(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} B_i^n) = \widetilde{\tau}(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} C_i^n) \leq \sum\limits_{n=N}^{\infty} \widetilde{\tau}(\widetilde{B}_n) + \epsilon$.

Para probar la última igualdad se toma $|\widetilde{\tau}(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} B_i^n) - \widetilde{\tau}(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} C_i^n)| = |\lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i|(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} B_i^n) - \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i|(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} C_i^n)| = \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i|(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} B_i^n - \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} C_i^n) \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i|(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (B_i^n - C_i^n)) \cdots (3)$, ya que $(B_i^n)_{\mathscr{U}} = (C_i^n)_{\mathscr{U}}$, entonces $\widetilde{\tau}((B_i^n - C_i^n)_{\mathscr{U}}) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego realizando la misma construcción que se efectuó en la demostración de la Proposición 11, dado $\delta > 0$ se pueden encontrar representantes de $(B_i^n - C_i^n)_{\mathscr{U}}$ de tal modo que se garantice $\widetilde{\tau}(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (B_i^n - C_i^n)) \leq \sum\limits_{n=N}^{\infty} \widetilde{\tau}((B_i^n - C_i^n)_{\mathscr{U}}) + \delta = \delta$, así de (3) se sigue $\widetilde{\tau}(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} B_i^n)$

$= \widetilde{\tau}(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} C_i^n)$, de donde se prueba (2).

Finalmente, de (1) y (2) se infiere $\widetilde{\tau}(\widetilde{A}) - \epsilon = \lim\limits_{\mathscr{U}}(|\mu_i|(A_i) - \epsilon) \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_i(B_i^n)|$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{\mathscr{U}} |\mu_i(B_i^n)| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\widetilde{\mu(\widetilde{B}_n)}| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\widetilde{\mu}|(\widetilde{B}_n) = |\widetilde{\mu}|(\widetilde{B}) \leq |\widetilde{\mu}|(\widetilde{A})$, así $\widetilde{\tau} \leq |\mu|$ en $\widetilde{\sigma}_0$. ■

1.4. Ultraproducto de espacios de Banach

Considérese una familia $\{(X_i, \|\cdot\|_{X_i}) \,|\, i \in I\}$ de espacios de Banach sobre un mismo campo, entonces se define el conjunto $\ell_\infty(X_i) = \{(x_i) \in \prod\limits_{i \in I} X_i \,|\, \sup\limits_{i \in I} \|x_i\|_{X_i} < \infty\}$.

***Lema* 4.** *Sea $\{(X_i, \|\cdot\|_{X_i}) \,|\, i \in I\}$ una colección de espacios de Banach en un mismo campo, entonces $(\ell_\infty(X_i), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach con las operaciones coordenada a coordenada y la norma $\|(x_i)\|_\infty = \sup\limits_{i \in I} \|x_i\|_{X_i}$.*

Demostración: La cerradura algebraica se siguen directo de la definición de $\ell_\infty(X_i)$, el que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma es consecuencia de las propiedades del supremo y de las normas coordenada a coordenada.

Completez, sea $\{(x_i^k)\}_k$ una sucesión de Cauchy en $\ell_\infty(X_i)$ y $\epsilon > 0$ dado, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N$ se tiene que $\sup\limits_{i \in I} \|x_i^n - x_i^m\| = \|(x_i^n) - (x_i^m)\|_\infty < \epsilon$, de donde, para cada $i \in I$ la sucesión $(x_i^n)_n$ es de Cauchy en X_i, luego por cada $i \in I$ llámese $x_i = \lim\limits_n x_i^n$, se afirma que $(x_i) \in \ell_\infty(X_i)$ y que $\{(x_i^n)\}_n$ converge a (x_i), en efecto, $\|(x_i)\|_\infty = \|(x_i) + (x_i^n) - (x_i^n)\|_\infty \leq \|(x_i - x_i^n)\|_\infty + \|(x_i^n)\|_\infty < \infty$ y $\|(x_i) - (x_i^n)\|_\infty < \epsilon$ si $n > N$. ■

Bajo las mismas hipótesis del lema anterior, supóngase que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en I, entonces para cada $(x_i) \in \ell_\infty(X_i)$ se tiene que $\sup\limits_{i \in I} \|x_i\|_{X_i} < \infty$, luego $\{\|x_i\|_{X_i} \,|\, i \in I\} \subset [0, M]$ para algún $M > 0$, por lo tanto $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$ existe para cada $(x_i) \in \ell_\infty(X_i)$, luego para cada $(x_i) \in \ell_\infty(X_i)$ se define $\mathscr{N}((x_i)) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$.

***Lema* 5.** *La función $\mathscr{N}$ es una seminorma en $\ell_\infty(X_i)$.*

Demostración: Sea $(x_i), (y_i) \in \ell_\infty(X_i)$ y λ un escalar, entonces:

$\mathscr{N}((0_i)) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|0_i\|_{X_i} = 0.$

$\mathscr{N}(\lambda(x_i)) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|\lambda x_i\|_{X_i} = |\lambda| \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = |\lambda|\mathscr{N}((x_i)).$

$\mathscr{N}((x_i) + (y_i)) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i + y_i\|_{X_i} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} (\|x_i\|_{X_i} + \|y_i\|_{X_i}) = \mathscr{N}((x_i)) + \mathscr{N}((y_i)).$
■

Llámese $ker(\mathscr{N}) = \{(x_i) \in \ell_\infty(X_i) \mid \mathscr{N}((x_i)) = 0\}$.

***Proposición* 12.** *$ker(\mathscr{N})$ es un subespacio cerrado de $\ell_\infty(X_i)$.*

Demostración: La prueba de la cerradura algebraica se sigue directo de las propiedades de los límites bajo filtros.

Se demostrará la cerradura topológica, como $\ell_\infty(X_i)$ es de Banach, entonces basta probar que $Ker(\mathscr{N})$ es completo, sea $\{(x_i^k)\}_k$ una sucesión de Cauchy en $\ell_\infty(X_i)$ y $\epsilon > 0$ fijo, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ implican $\sup\limits_{i \in I} \|x_i^n - x_i^m\|_{X_i} = \|(x_i^n) - (x_i^m)\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$, puesto que $\ell_\infty(X_i)$ es completo, existe $(x_i) \in \ell_\infty(X_i)$ al que $\{(x_i^k)\}_k$ converge, entonces por ser uniforme la convergencia $\sup\limits_{i \in I} \|x_i^n - x_i\|_{X_i} < \epsilon$ si $n \geq N$, así $\|x_i\|_{X_i} \leq \|x_i^n\|_{X_i} + \epsilon$ para todo $i \in I$ y $n \geq N$, de donde fijando $n_0 = N$ se tiene $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} (\|x_i^{n_0}\|_{X_i} + \epsilon) = \epsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = 0$ y $(x_i) \in ker(\mathscr{N})$.
■

Como $\ker(\mathscr{N})$ es un subespacio cerrado de $\ell_\infty(X_i)$, entonces $\ell_\infty(X_i) \big/ ker(\mathscr{N})$ es un espacio Hausdorff.

***Definición* 7** (Ultraproducto de espacios de Banach)**.** *El ultraproducto de una familia $(X_i)_{i \in I}$ de espacios de Banach, respecto a un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en I, es el cociente $\ell_\infty(X_i) \big/ ker(\mathscr{N})$, denotado mediante $(X_i)_{\mathscr{U}}$, si $X_i = X$ para toda $i \in I$, entonces $(X)_{\mathscr{U}} = (X_i)_{\mathscr{U}}$ es llamada ultrapotencia de X respecto a $\mathscr{U}$.*

La *norma cociente* en $(X_i)_{\mathscr{U}}$ se define $\|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \inf\{\|(x_i) + (y_i)\|_\infty \mid (y_i) \in ker(\mathscr{N})\}$, nótese que es la definición usual de norma en el cociente de espacios de Banach, tomando como seminorma a $\|\cdot\|_\infty$ y como subespacio $ker(\mathscr{N})$.

Obsérvese que el correr $(y_i) \in ker(\mathscr{N})$ es equivalente a variar (z_i) sobre todos $(z_i) \in \widetilde{(x_i)}_{\mathscr{U}}$ en la definición de la norma cociente, luego la definición es independiente del representante escogido.

***Proposición* 13.** *La norma cociente en $(X_i)_{\mathscr{U}}$ satisface, $\|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$ para cualesquiera $(x_i) \in \widetilde{(x_i)}$.*

Demostración: Sea $\widetilde{(x_i)} \in (X_i)_{\mathscr{U}}$, luego $\widetilde{(x_i)} = \{(x_i+y_i) \in \ell_\infty(X_i) \,|\, (y_i) \in ker(\mathscr{N})\}$, así $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i + y_i\|_{X_i} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} + \lim\limits_{\mathscr{U}} \|y_i\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$.

Por otra parte $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i + y_i - y_i\|_{X_i} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i + y_i\|_{X_i} + \lim\limits_{\mathscr{U}} \|y_i\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$, por lo tanto $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i + y_i\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$.

Luego $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i + y_i\|_{X_i} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \sup\limits_{i\in I} \|x_i + y_i\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|(x_i + y_i)\|_\infty = \|(x_i + y_i)\|_\infty$.

Así, ya que $(y_i) \in ker(\mathscr{N})$ es cualesquiera, se tiene $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i + y_i\|_{X_i} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$ $\leq \sup\limits_{(y_i)\in ker(\mathscr{N})} \|(x_i + y_i)\|_\infty = \|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}}$, es decir, $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} \leq \|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}}$ para cualesquiera $(x_i) \in \widetilde{(x_i)}$.

Para demostrar la otra desigualdad, tómese $\epsilon > 0$ fijo, entonces se tiene que $I_\epsilon = \{i \,|\, \|x_i\|_{X_i} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} + \epsilon\} \in \mathscr{U}$ puesto que es una vecindad de $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$, ahora considérese (y_i) tal que:

$$y_i = \begin{cases} -x_i & , \text{si } i \notin I_\epsilon \\ 0 & , \text{si } i \in I_\epsilon \end{cases}$$

Y como $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|y_i\|_{X_i} = \lim\limits_{i\in I_\epsilon, \mathscr{U}} \|y_i\|_{X_i} = \lim\limits_{i\in I_\epsilon, \mathscr{U}} 0 = 0$, se tiene que $(y_i) \in ker(\mathscr{N})$, además $\|(x_i + y_i)\|_\infty = \sup\limits_{i\in I} \|x_i + y_i\|_{X_i} = \sup\limits_{i\in I_\epsilon} \|x_i\|_{X_i}$, de donde $\|(x_i + y_i)\|_\infty = \sup\limits_{i\in I_\epsilon} \|x_i\|_{X_i}$ $\leq \sup\limits_{i\in I_\epsilon} \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} + \epsilon = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} + \epsilon$.

Por lo tanto $\|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \inf\limits_{(y_i)\in ker(\mathscr{N})} \|(x_i + y_i)\|_\infty \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} + \epsilon$, así $\|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}$. ■

La proposición anterior además de brindar una forma para calcular la norma de un elemento del ultraproducto, relaciona la norma del ultraproducto con las normas de cada componente, de esto se sigue que si una propiedad la tienen todas las normas de los espacios que conforman el ultraproducto y esta propiedad se expresa de tal modo que es compatible con los límites bajo ultrafiltros, por ejemplo mediante combinaciones lineales y composiciones de funciones continuas, entonces dicha propiedad también la tendrá la norma del ultraproducto, una consecuencia de esto es el siguiente lema.

***Lema* 6.** *Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia espacios de Hilbert, entonces $(X_i)_{\mathscr{U}}$ es de Hilbert.*

Demostración: Se sigue del hecho de que coordenada a coordenada se satisface la identidad del paralelogramo $\|x_i + y_i\|^2_{X_i} + \|x_i - y_i\|^2_{X_i} = 2\|x_i\|^2_{X_i} + 2\|y_i\|^2_{X_i}$ ■

Al igual que se tiene en el ultraproducto conjuntista, en el ultraproducto de espacios de Banach se satisface lo siguiente:

***Lema* 7.** *Si $\mathscr{U} = [\{i_0\}]$ es un ultrafiltro principal, entonces $(X_i)_{\mathscr{U}} \simeq X_{i_0}$.*

Demostración: Se sabe que $(x_i) \in ker(\mathscr{N})$ si $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = 0$ y ya que $\mathscr{U} = [\{i_0\}]$ es principal, entonces $0 = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = \|x_{i_0}\|_{X_{i_0}}$, de donde $x_{i_0} = 0$, así $(X_i)_{\mathscr{U}} = \ell_\infty(X_i) \Big/ ker(\mathscr{N}) \simeq X_{i_0}$. ■

La siguiente proposición será de gran utilidad para los propósitos del presente trabajo.

***Proposición* 14.** *Sea X es un espacio de Banach, I una familia de índices y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I, entonces X se puede encajar isométrica e isomorfamente en $(X)_{\mathscr{U}}$.*

Demostración: Sea $T : X \to (X)_{\mathscr{U}}$ dada por $x \mapsto \widetilde{(x)} = \widetilde{(x_i)}$ donde $x_i = x$ para cada $i \in I$, se afirma que T es un encaje isométrico e isomorfo.

El que T preserva la estructura algebraica se sigue directo de la definición, la isometría es consecuencia de que $\|x\| = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x\| = \|\widetilde{(x)}\|_{\mathscr{U}}$. ■

Cuando se diga que X es un subespacio de $(X)_{\mathscr{U}}$, se pensará en el primero encajado en $(X)_{\mathscr{U}}$ mediante la transformación T dada en la demostración anterior, esto es, se identificará a X con $T(X)$, T será llamado el *encaje natural* de X en $(X)_{\mathscr{U}}$.

Una pregunta que surge natural del lema y proposición anteriores, es si la ultrapotencia de un espacio verdaderamente está generando un espacio más grande que el espacio del que se parte, la respuesta la da la siguiente proposición.

***Proposición* 15.** *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces X mediante el encaje natural es un subespacio propio de $(X)_{\mathscr{U}}$.*

Demostración: Como X tiene dimensión infinita, entonces existe una sucesión (x_n) en X acotada y sin subsucesiones convergentes, luego $(x_n) \in \ell_\infty(X)$, de donde $\widetilde{(x_n)} \in (X)_{\mathscr{U}}$, se afirma que $\widetilde{(x_n)} \notin X \hookrightarrow (X)_{\mathscr{U}}$, para ello se procede por contradicción, si $\widetilde{(x_n)} \in X$, entonces $\widetilde{(x_n)} = \widetilde{(x)}$ para algún $x \in X$, luego $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i - x\| = 0$, dado que $\mathscr{U}$ no es principal, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim\limits_{k} \|x_{n_k} - x\| = 0$ lo cual es una contradicción. ■

De hecho se puede probar más que lo anterior, en primer lugar, que cualquier ultrapotencia de un espacio finito dimensional siempre es el mismo espacio, razón por la cual el caso finito dimensional se descarta, y que siempre la ultrapotencia de un espacio infinito dimensional no es separable, de donde se infiere que la ultrapotencia de un espacio separable es un espacio mucho mayor.

En la Proposición 14 se definió el encaje natural de X en $(X)_{\mathscr{U}}$, recíprocamente, se tiene una proyección de $(X)_{\mathscr{U}}$ en X, para definirla, se considerará lo siguiente:

Dado un espacio de Banach X, se le identificará con su imagen en X^{**} mediante la aplicación $\varphi : X \to X^{**}$, dada por $x \mapsto \varphi(x)$, donde $\varphi(x)(x^*) = x^*x$ para cada $x^* \in X^*$, luego por el Teorema de Banach-Alaoglu, las bolas en X^{**} con la topología ω^* son compactas, entonces dado $\widetilde{(x_i)} \in (X)_{\mathscr{U}}$ se tiene que $\omega^* - \lim\limits_{\mathscr{U}} x_i$ existe en X^{**}.

Ahora si $(x_i), (y_i) \in \widetilde{(x_i)}$, $x = \omega^* - \lim\limits_{\mathscr{U}} x_i$ y $y = \omega^* - \lim\limits_{\mathscr{U}} y_i$, entonces $\|x - y\|$ $= \|\omega^* - \lim\limits_{\mathscr{U}} x_i - \omega^* - \lim\limits_{\mathscr{U}} y_i\| = \|\omega^* - \lim\limits_{\mathscr{U}} x_i - y_i\| \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i - y_i\| = \|\widetilde{(x_i)} - \widetilde{(y_i)}\|_{\mathscr{U}}$ $= 0$, la desigualdad se debe a que la norma es ω^*-semicontinua inferiormente, para demostrarlo basta probar que $\{x^* \in X^* : \|x^*\| > r\}$ es ω^*-abierto para cada $r > 0$, sean $r > 0$, $x \in X^{**}$ con $\|x\| > r$ y $\epsilon > 0$ tal que $\|x\| - \epsilon > r$, luego existe $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$, tal que $\|x\| - \epsilon < |x(x^*)|$, se considera la vecindad ω^* básica V dada mediante $V = \{y \in X^{**} : |x(x^*) - y(x^*)| < \epsilon\}$, luego para cada $y \in V$ se tiene que $||x(x^*)| - |y(x^*)|| \leq |x(x^*) - y(x^*)| < \epsilon$, de donde $|y(x^*)| > \|x\| - \epsilon > r$, así $V \subset \{x^* \in X^* : \|x^*\| > r\}$ y en consecuencia $\{x^* \in X^* : \|x^*\| > r\}$ es ω^*-abierto.

Así la transformación $\theta : (X)_{\mathscr{U}} \to X^{**}$ con $\theta\widetilde{(x_i)} = \omega^* - \lim\limits_{\mathscr{U}} x_i$, está bien definida, se puede probar que θ es un operador lineal acotado y que el encaje natural de X en $(X)_{\mathscr{U}}$ seguido de θ es la identidad en X, por lo que es prácticamente una proyección, razón por la cual será llamada la *proyección canónica* de $(X)_{\mathscr{U}}$ en X.

El siguiente resultado muestra la relación que tiene la ultrapotencia de espacios de

Banach con conjuntos cuya estructura será de interés mas adelante, la notación y definiciones son las mismas que se emplearon en el caso del ultraproducto conjuntista, solo que en lugar de considerarlo, se supone el ultraproducto de espacios de Banach.

***Proposición* 16.** *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios de Banach, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I y $D_i \subset X_i$ para cada $I \in I$, entonces se tiene que*

1) $(D_i)_{\mathscr{U}}$ es convexo si cada D_i es convexo

2) $(D_i)_{\mathscr{U}}$ es acotado si existe $M > 0$ tal que $\sup\limits_{i\in I}\sup\limits_{x\in D_i}\|x\|_{X_i} = \sup\limits_{i\in I} diam(D_i) < M$, además $diam((D_i)_{\mathscr{U}}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} diam(D_i)$

3) $(D_i)_{\mathscr{U}}$ es cerrado si cada D_i es cerrado

Demostración: 1) Sean $t \in (0,1)$ y $\widetilde{(x_i)}, \widetilde{(y_i)} \in (D_i)_{\mathscr{U}}$, sin pérdida de generalidad en lo que resta de la prueba se supondrá que $x_i, y_i \in D_i$ para cada $i \in I$, entonces por la convexidad, para cada $i \in I$ se tiene que $tx_i + (1-t)y_i \in D_i$ de donde $t\widetilde{(x_i)} + (1-t)\widetilde{(y_i)} = \widetilde{(tx_i + (1-t)y_i)} \in (D_i)_{\mathscr{U}}$.

2) Sean $\widetilde{(x_i)}, \widetilde{(y_i)} \in (D_i)_{\mathscr{U}}$, luego $\|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} M = M$, así $(D_i)_{\mathscr{U}}$ es acotado.

Por otra parte, $\lim\limits_{\mathscr{U}} diam(D_i)$ existe puesto que $diam(D_i) \leq 2M$ para todo $i \in I$, luego $\|\widetilde{(x_i)} - \widetilde{(y_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i - y_i\|_{X_i} \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} diam(D_i)$, así $diam((D_i)_{\mathscr{U}}) \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} diam(D_i)$.

Para probar la otra desigualdad, se considera $\epsilon > 0$, entonces para cada $i \in I$ existen $x_i, y_i \in D_i$ tales que $diam(D_i) - \epsilon < \|x_i - y_i\|_{X_i} \leq diam(D_i)$ de donde $\|\widetilde{(x_i)} - \widetilde{(y_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i - y_i\|_{X_i} \geq \lim\limits_{\mathscr{U}} (diam(d_i) - \epsilon) = \lim\limits_{\mathscr{U}} diam(D_i) - \epsilon$, así $diam((D_i)_{\mathscr{U}}) \geq \lim\limits_{\mathscr{U}} diam(D_i)$.

3) Sea $\widetilde{(x_i)}$ un punto límite de $(D_i)_{\mathscr{U}}$ y $\{\widetilde{(x_i^n)}\}_n$ una sucesión en $(D_i)_{\mathscr{U}}$ que converge a $\widetilde{(x_i)}$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $\|\widetilde{(x_i)} - \widetilde{(x_i^k)}\|_{\mathscr{U}} < \frac{1}{m}$ si $k \geq N_m$, es decir, $\lim\limits_{i,\mathscr{U}} \|x_i - x_i^k\|_{X_i} < \dfrac{1}{m}$ para todo $k \geq N_m$, en particular $\lim\limits_{i,\mathscr{U}} \|x_i - x_i^{N_m}\|_{X_i} < \dfrac{1}{m}$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $I_m \in \mathscr{U}$ tal que $\|x_i - x_i^{N_m}\|_{<\frac{1}{m}}$ si $i \in I_m$, luego se construyen recursivamente las sucesiones de conjuntos (A_m), (B_m) en I del modo siguiente, $A_1 = I_1$, $A_{k+1} = A_k \cap I_{k+1}$ y $B_k = A_k - A_{k+1}$, además se toma $B_\infty = \bigcap\limits_k A_k$, se

observa que la familia $\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{B_\infty\}$ es ajena por parejas y que $\bigcup_k B_k \cup B_\infty = I_1$, si $i \in B_\infty$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\|x_i - x_i^{N_m}\| < \frac{1}{m}$, esto implica que $(x_i^n)_n$ tiene una subsucesión $(x_i^{N_m})_m$ convergente que converge a x_i, entonces por ser D_i cerrado se tiene que $x_i \in D_i$, se suponen $c_i \in D_i$ elegidos para cada $i \in I_1^c$, luego para cada $i \in I$ se define:

$$d_i = \begin{cases} d_i^{N_m} & \text{, si } i \in B_m \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \\ x_i & \text{, si } i \in B_\infty \\ c_i & \text{, si } i \notin I_1 \end{cases}$$

Por construcción $\widetilde{(d_i)} \in (D_i)_{\mathscr{U}}$ y se afirma que $\widetilde{(d_i)} = \widetilde{(x_i)}$, para ello, $\|\widetilde{(d_i)} - \widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|d_i - x_i\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}_{I_1}} \|d_i - x_i\|_{X_i} = 0$, la última igualdad se da porque dado $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_k \in \mathscr{U}$ y $\|d_i - x_i\|_{X_i} < \frac{1}{k}$ para todo $i \in A_k$. ■

Es natural preguntarse si dada una familia de funciones definidas entre dos familias de espacios de Banach, estas inducen una función definida en las respectivas ultrapotencias, la siguiente definición responde dicha pregunta.

***Definición* 8** (Ultraproducto de funciones)**.** *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ dos familias de espacios de Banach, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I que no es principal, $D_i \subset X_i$ para cada $i \in I$ y $(T_i)_{i\in I}$ una familia de transformaciones $T_i : D_i \subset X_i \to Y_i$ para cada $i \in I$ tal que*

$$\text{Para cada } \widetilde{(d_i)}, \widetilde{(e_i)} \in (D_i)_{\mathscr{U}},\ \lim_{\mathscr{U}} \|d_i - e_i\|_{X_i} = 0 \text{ implica}$$
$$\lim_{\mathscr{U}} \|T_i d_i - T_i e_i\|_{Y_i} = 0 \cdots (\diamondsuit).$$

Se define el ultraproducto de la familia $(T_i)_{i\in I}$ como la función $(T_i)_{\mathscr{U}} : (D_i)_{\mathscr{U}} \to (Y_i)_{\mathscr{U}}$ dada por $(T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(d_i)} = \widetilde{(T_i d_i)}$ para cada $\widetilde{(d_i)} \in (D_i)_{\mathscr{U}}$.

La condición $(\diamondsuit)$ impuesta en la definición anterior, es necesaria para que esté bien definido el ultraproducto de funciones entre espacios de Banach.

En el caso del ultraproducto conjuntista, siempre se puede construir una función en las ultrapotencias conjuntistas inducida por una familia de funciones sin necesidad de imponer condiciones sobre la familia, para mas detalles se puede consultar [15].

La siguiente proposición asegura la existencia del ultraproducto de operadores bajo condiciones que no involucran explícitamente el cálculo de un límite bajo un ultrafiltro como lo hace $(\diamondsuit)$.

***Proposición* 17.** *Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ colecciones de espacios de Banach, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I que no es principal, $D_i \subset X_i$ para cada $i \in I$, $(T_i : D_i \to Y_i)_{i\in I}$ una familia de transformaciones tales que para cada $i \in I$ existe $\lambda_i \geq 0$ con $\|T_i d_i - T_i e_i\|_{X_i} \leq \lambda_i \|d_i - e_i\|_{Y_i}$ y $\sup_{i\in I}\lambda_i < \infty$, entonces $(T_i)_{i\in I}$ satisface la condición $(\diamondsuit)$, en consecuencia existe $(T_i)_{\mathscr{U}}$, además $\|(T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(d_i)} - (T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(e_i)}\|_{\mathscr{U}} \leq \lambda \|\widetilde{(d_i)} - \widetilde{(e_i)}\|_{\mathscr{U}}$, donde $\lambda = \lim_{\mathscr{U}} \lambda_i$.*

Demostración: Dados $\widetilde{(d_i)}, \widetilde{(e_i)} \in (D_i)_{\mathscr{U}}$ tales que $\lim_{\mathscr{U}} \|d_i - e_i\|_{X_i} = 0$ se tiene que $\lim_{\mathscr{U}} \|T_i d_i - T_i e_i\|_{Y_i} \leq \lim_{\mathscr{U}} \lambda_i \|d_i - e_i\|_{X_i} = \lambda(0) = 0$.

$\|(T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(d_i)} - (T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(e_i)}\|_{\mathscr{U}} = \|\widetilde{(T_i d_i)} - \widetilde{(T_i e_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} \|T_i d_i - T_i e_i\|_{Y_i} \leq \lim_{\mathscr{U}} \lambda_i \|d_i - e_i\|_{X_i}$
$= \lambda \|\widetilde{(d_i)} - \widetilde{(e_i)}\|_{\mathscr{U}}$. ■

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que ultraproducto de operadores lineales acotados es un operador lineal acotado.

***Proposición* 18.** *Sean $(X_i)_{i\in I}$, $(Y_i)_{i\in I}$ familias de espacios de Banach, $(T_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ una colección de operadores lineales acotados con $\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I que no es principal, entonces $(T_i)_{\mathscr{U}}$ es un operador lineal acotado de $(X_i)_{\mathscr{U}}$ en $(Y_i)_{\mathscr{U}}$ tal que $\|(T_i)_{\mathscr{U}}\| = \lim_{\mathscr{U}} \|T_i\|$.*

Demostración: La existencia de $(T_i)_{\mathscr{U}}$ la garantiza la Proposición 17.

Para probar la linealidad, sean $\widetilde{(x_i)}, \widetilde{(y_i)} \in (X_i)_{\mathscr{U}}$ y λ un escalar, entonces $(T_i)_{\mathscr{U}}(\lambda\widetilde{(x_i)} + \widetilde{(y_i)}) = (T_i)_{\mathscr{U}}(\widetilde{\lambda x_i + y_i}) = (\widetilde{T_i(\lambda x_i + y_i)}) = \lambda\widetilde{(T_i x_i)} + \widetilde{(T_i y_i)} = \lambda (T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_i)} + (T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(y_i)}$.

De nuevo, por la Proposición 17, se tiene que $\|(T_i)_{\mathscr{U}}\| \leq \lim_{\mathscr{U}} \|T_i\|$, para demostrar la desigualdad faltante, se considera $\epsilon > 0$, entonces para cada $i \in I$ se toma un $x_i \in X_i$ con $\|x_i\|_{X_i} = 1$ tal que $(1-\epsilon)\|T_i\| < \|T_i x_i\|_{Y_i}$, luego $\widetilde{(x_i)} \in (X_i)_{\mathscr{U}}$ y $\|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = 1$, por lo tanto $(1-\epsilon)\lim_{\mathscr{U}} \|T_i\| \leq \lim_{\mathscr{U}} \|T_i x_i\|_{Y_i} = \|\widetilde{(T_i x_i)}\|_{\mathscr{U}}$
$= \|(T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} \leq \|(T_i)_{\mathscr{U}}\|$, al ser $\epsilon > 0$ cualesquiera, se tiene la desigualdad buscada. ■

De la proposición anterior se sigue que dado un espacio de Banach X, un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en un conjunto I y $(x_i^*)_{i\in I}$ una familia acotada en X^*, entonces $(x_i^*)_{\mathscr{U}}$ define un funcional lineal acotado de $(X)_{\mathscr{U}}$ en $(\mathbb{F})_{\mathscr{U}} = \mathbb{F}$ donde $\mathbb{F}$ es el campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

En general toda familia acotada uniformemente de operadores $T_i \in \mathscr{B}(X_i, Y_i)$ induce un operador $(T_i)_{\mathscr{U}} \in \mathscr{B}((X_i)_{\mathscr{U}}, (Y_i)_{\mathscr{U}})$, luego resulta natural preguntarse la relación que tienen $(\mathscr{B}(X_i, Y_i))_{\mathscr{U}}$ y $\mathscr{B}((X_i)_{\mathscr{U}}, (Y_i)_{\mathscr{U}})$.

***Proposición* 19.** *Dadas $(X_i)_{i\in I}$, $(Y_i)_{i\in I}$ familias de espacios de Banach y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en un conjunto I, se tiene que $(\mathscr{B}(X_i, Y_i))_{\mathscr{U}}$ está encajado isométrica e isomorfamente en $\mathscr{B}((X_i)_{\mathscr{U}}, (Y_i)_{\mathscr{U}})$, en particular $(X_i^*)_{\mathscr{U}}$ está encajado isométrica e isomorfamente en $(X_i)^*_{\mathscr{U}}$.*

Demostración: Si $(T_i), (S_i) \in \widetilde{(T_i)} \in (\mathscr{B}(X_i, Y_i))_{\mathscr{U}}$ entonces dado $\widetilde{(x_i)} \in (X)_{\mathscr{U}}$ se tiene que $\|(T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_i)} - (S_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \|\widetilde{(T_i x_i)} - \widetilde{(S_i x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|T_i x_i - S_i x_i\|_{Y_i}$ $\leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \|T_i - S_i\| \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = 0\|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = 0$ de donde la aplicación $\phi : (\mathscr{B}(X_i, Y_i))_{\mathscr{U}} \to \mathscr{B}((X_i)_{\mathscr{U}}, (Y_i)_{\mathscr{U}})$ con $\phi\widetilde{(T_i)} = (T_i)_{\mathscr{U}}$ está bien definida.

Se mostrará que ϕ es lineal, dados $\widetilde{(T_i)}, \widetilde{(S_i)} \in (\mathscr{B}(X_i, Y_i))_{\mathscr{U}}$, α escalar y $\widetilde{(x_i)} \in (X_i)_{\mathscr{U}}$ se tiene que $\phi(\alpha\widetilde{(T_i)} + \widetilde{(S_i)})\widetilde{(x_i)} = (\alpha T_i + S_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_i)} = \widetilde{((\alpha T_i + S_i)x_i)} = \alpha\widetilde{(T_i x_i)} + \widetilde{(S_i x_i)}$ $= \alpha(T_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_i)} + (S_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_i)}$, de donde $\phi(\alpha\widetilde{(T_i)} + \widetilde{(S_i)}) = \alpha\phi\widetilde{(T_i)} + \phi\widetilde{(S_i)}$.

Se afirma que ϕ es una isometría, en efecto, de la Proposición 18 se sigue que $\|\phi\widetilde{(T_i)}\|$ $= \|(T_i)_{\mathscr{U}}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|T_i\| = \|\widetilde{(T_i)}\|_{\mathscr{U}}$.

Por lo tanto $(X^*)_{\mathscr{U}}$ es un subespacio de $(X)^*_{\mathscr{U}}$. ■

En el siguiente capítulo se estudiarán condiciones bajo las cuales $(X_i^*)_{\mathscr{U}} \simeq (X_i)^*_{\mathscr{U}}$.

Capítulo 2

$L_1(\mu)$ y su ultrapotencia

En el presente capítulo se emplearán las técnicas desarrolladas en el capítulo anterior para estudiar propiedades sobre $L_1(\mu)$ con μ medida de probabilidad, sus ultrapotencias, propiedades geométricas de las ultrapotencias y se finalizará con una serie de resultados acerca de probabilidades aleatorias.

2.1. Propiedades de $(L_1(\mu))_{\mathscr{U}}$

Al igual que se probó para el ultraproducto conjuntista, algunas clases de espacios de Banach son cerradas bajo ultraproductos, para demostrarlo se considerarán dos famosos teoremas, la prueba del siguiente se puede encontrar en [9].

***Teorema* 6** (Teorema de representación de Gelfand)**.** *Sea X una C^*-Álgebra conmutativa, entonces existe un compacto K de tal modo que X es isomorfo e isométrico al espacio $C(K)$ de funciones continuas de K en $\mathbb{C}$ con la norma supremo.*

Una norma $\|\cdot\|$ en un retículo de Banach X se dirá que es *p-aditiva* con $1 \leq p \leq \infty$ si para cada $x, y \in X$ con $x \wedge y = 0$ se tiene que $\|x+y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$ si $1 \leq p < \infty$ y $\|x+y\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$ si $p = \infty$.

Un retículo de Banach se dirá que es un espacio L_p *abstracto* con $1 \leq p \leq \infty$ si su norma es p-aditiva.

La demostración del siguiente teorema así como las definiciones que se acaban de presentar, se encuentran en [44].

***Teorema* 7** (Bohnenblust, Nakano)**.** *Sea X un espacio L_p abstracto complejo, entonces X es isométrico y retículo-isomorfo a un $L_p(\mu, \mathbb{C})$ para alguna medida μ.*

De los Teoremas de Gelfand y Bohnenblust-Nakano, Teoremas 6 y 7 se sigue el siguiente resultado.

***Teorema* 8.** *Sea I una familia de índices y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I, entonces:*

1) *Si $(K_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios compactos Hausdorff, entonces existe un compacto K tal que $(C(K_i))_{\mathscr{U}}$ es isométrico, álgebra-isomorfo, retículo-isomorfo a $C(K)$*

2) *Si $1 \leq p < \infty$ y $(\mu_i)_{i\in I}$ es una familia de medidas σ-aditivas, entonces $(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ es isométrico, orden-isomorfo a $L_p(\mu)$ para alguna medida μ*

La demostración del teorema anterior es simple conceptualmente, sin embargo requiere cálculos meramente técnicos, ya que consiste en verificar el cumplimiento de los axiomas de álgebra C^* y de L_p abstracto, razón por la cual solo se presenta un bosquejo de la prueba.

Para demostrar 1), se prueba que el ℓ_∞ de una familia de álgebras C^* es un álgebra C^* bajo las operaciones puntuales, luego se demuestra que el kernel de la seminorma inducida por el ultrafiltro es un ideal cerrado, de donde la ultrapotencia $(C(K_i))_{\mathscr{U}}$ es un álgebra C^*, luego basta aplicar el Teorema de Gelfand, Teorema 6.

La demostración de 2) es muy semejante a la de 1), la diferencia es que se prueba que el ℓ_∞ de una familia de L_p abstractos es un L_p abstracto y finalmente se le aplica el Teorema de Bohnenblust-Nakano, Teorema 7 a $(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$.

De lo anterior se puede extraer mucho más, como se muestra a continuación.

***Proposición* 20.** *El ultraproducto de álgebras de Banach o retículos de Banach, es de nuevo un álgebra de Banach o retículo de Banach respectivamente.*

La prueba de la proposición anterior no se incluye ya que al igual que el Teorema 8, consiste en probar todos los axiomas de álgebra de Banach y retículo de Banach, sin embargo, debido a que mas adelante se usará el ultraproducto de álgebras y retículos de Banach, se mostrará de que forma se operan los elementos en el ultraproducto de un álgebra o retículo de Banach.

Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios de Banach y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en I, se tiene que:

1) Si X_i es álgebra de Banach para cada $i \in I$, entonces mediante $\widetilde{(x_i)} \cdot \widetilde{(y_i)} = \widetilde{(x_i \cdot y_i)}$ para cada $\widetilde{(x_i)}, \widetilde{(y_i)} \in (X_i)_{\mathscr{U}}$, el espacio $(X_i)_{\mathscr{U}}$, es un álgebra de Banach.

Si adicionalmente X_i es álgebra C^* para cada $i \in I$, entonces $(X_i)_{\mathscr{U}}$ es un álgebra C^* con $\widetilde{(x_i)}^* = \widetilde{(x_i^*)}$ para cada $\widetilde{(x_i)} \in (X_i)_{\mathscr{U}}$

2) Si X_i es un retículo de Banach para cada $i \in I$, entonces $(X_i)_{\mathscr{U}}$ es un retículo de Banach, donde $\widetilde{(x_i)} \wedge \widetilde{(y_i)} = \widetilde{(x_i \wedge y_i)}$ y $\widetilde{(x_i)} \vee \widetilde{(y_i)} = \widetilde{(x_i \vee y_i)}$ para cada $\widetilde{(x_i)}, \widetilde{(y_i)} \in (X_i)_{\mathscr{U}}$

Es sabido que en todo retículo de Banach X, se tiene que $f \in X$ satisface $f \geq 0$ si y solo si $f \vee 0 = f$, por lo tanto en el ultraproducto $(X_i)_{\mathscr{U}}$ de retículos de Banach, se tiene que $f = \widetilde{(f_i)} \in (X_i)_{\mathscr{U}}$ cumple $f \geq 0$ si y solo si $\widetilde{(f_i \vee 0)} = \widetilde{(f_i)}$, es decir, existe un representante de f de tal modo que coordenada a coordenada es mayor o igual a 0 o bien $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|f_i \vee 0 - f_i\|_{X_i} = 0$, de forma análoga, para $f, g \in (X_i)_{\mathscr{U}}$ con $g = \widetilde{(g_i)}$, se tiene $f \wedge g = 0$ si y solo si $\widetilde{(f_i \wedge g_i)} = \widetilde{(0)}$, es decir, $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|f_i \wedge g_i\|_{X_i} = 0$ o bien hay representantes de tal modo que su ínfimo es 0 coordenada a coordenada.

Para garantizar la última afirmación, se consideran $(f_i - f_i \wedge g_i)$ y $(g_i - f_i \wedge g_i)$, es un resultado conocido de retículos de Banach que $f_i - f_i \wedge g_i$ y $g_i - f_i \wedge g_i$ son ortogonales, x y y son ortogonales cuando $|x| \wedge |y| = 0$ con $|x| = (x \vee 0) + ((-x) \vee 0)$, además $(f_i - f_i \wedge g_i)$ es un representante de (f_i), ya que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|f_i - f_i + f_i \wedge g_i\|_{X_i} = 0$, lo mismo para $(g_i - f_i \wedge g_i)$ y (g_i).

Del Teorema 8 naturalmente surge la pregunta sobre la relación que tiene el ultraproducto conjuntista $(K_i)_{\mathscr{U}}$ de los compactos K_i con $i \in I$ y el compacto K cuya existencia se garantiza en el inciso 1), la respuesta se muestra a continuación.

Teorema 9. *Sea $(K_i)_{i \in I}$ una familia de espacios compactos Hausdorff y K el compacto tal que $(C(K_i))_{\mathscr{U}} \simeq C(K)$, entonces el ultraproducto conjuntista $(K_i)_{\mathscr{U}}$ es homeomorfo a un subconjunto denso de K.*

La demostración del teorema anterior se omite ya que no se encuentra dentro de los objetivos del presente trabajo, sin embargo se hace mención de el ya que da un contexto para el uso de los ultraproductos y ultrapotencias.

Para el caso del ultraproducto conjuntista $\widetilde{\mu}$ de las medidas μ_i asociadas a los espacios $L_p(\mu_i)$ y de la medida μ de tal modo que $L_p(\mu) \simeq (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$, la relación está dada mediante la descomposición del espacio $(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ en una suma directa donde uno de sus factores es $L_p(\widetilde{\mu})$ como lo muestra el siguiente teorema, cuya prueba se encuentra en [35] para el caso general de espacio de Orlicz, en el presente se da para el caso especial de espacios L_p.

Teorema 10. *Sean I un conjunto, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I, $(\Omega_i, \sigma_i, \mu_i)_{i\in I}$ una familia de espacios de medida tal que $\sup\limits_{i\in I}\mu_i(\Omega_i) < \infty$ y $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\sigma}, \widetilde{\mu})$ su ultraproducto conjuntista, entonces $(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}} \simeq L_p(\widetilde{\mu}) \oplus_p L_p(\nu)$ para alguna medida ν.*

Más específicamente:

i) Hay una isometría $J : L_p(\widetilde{\mu}) \to (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$

ii) Hay una proyección $\widetilde{P} : (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}} \to L_p(\widetilde{\mu})$ de norma 1 que satisface:

1) $\widetilde{f} \geq \widetilde{P}(\widetilde{f}) \geq 0$ si $\widetilde{f} \geq 0$

2) $ker(\widetilde{P})$ es isométrico, retículo isomorfo a un $L_p(\nu)$ para alguna medida ν y $\|\widetilde{f}\|^p = \|\widetilde{P}(\widetilde{f})\|^p + \|(I - \widetilde{P})(\widetilde{f})\|^p$ para toda $\widetilde{f} \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$

Demostración: Construcción de la isometría J. Se sabe que las funciones simples definidas en un álgebra que genera la σ-álgebra $\widetilde{\sigma}$ de $\widetilde{\mu}$, son densas en el espacio $L_p(\widetilde{\mu})$, luego considérese la familia de funciones simples en $L_p(\widetilde{\mu})$ cuya forma es $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\widetilde{A_k}}$ donde $\widetilde{A_k} = \widetilde{(A_i^k)}$ con $\widetilde{(A_i^k)}$ ultraproducto conjuntista, $A_i^k \in \sigma_i$ para cada $i \in I$ y $1 \leq k \leq n$.

Ya que existe $M > 0$ tal que $\sup\limits_{i\in I}\mu_i(\Omega_i) < M$, entonces para cada $i \in I$, se tiene que $(\Omega_i, \sigma_i, \mu_i)$ es finita, de donde $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_i^k} \in L_p(\mu_i)$ y $\|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_i^k}\|^p_{L_p(\mu_i)} \leq M\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|$ para toda $i \in I$, por lo tanto $(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_i^k}) \in \ell_\infty(L_p(\mu_i))$.

Así, para cada $\widetilde{f} = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\widetilde{A_k}}$ se define $J(\widetilde{f}) = J(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\widetilde{A_k}}) = \widetilde{(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_i^k})} \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$.

El operador J está bien definido. En efecto, sean $(A_i^k)_{\mathscr{U}} = (B_i^k)_{\mathscr{U}}$ para cada $1 \leq k \leq n$, como $\|\widetilde{(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_i^k})} - \widetilde{(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{B_i^k})}\|_{\mathscr{U}} \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\|(\widetilde{\alpha_k\chi_{A_i^k}}) - (\widetilde{\alpha_k\chi_{B_i^k}})\|_{\mathscr{U}}$ y dado k fijo se tiene que $\|\widetilde{(\alpha_k\chi_{A_i^k})}-\widetilde{(\alpha_k\chi_{B_i^k})}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|\alpha_k\chi_{A_i^k}-\alpha_k\chi_{B_i^k}\|_{L_p(\mu_i)} = |\alpha_k|\lim\limits_{\mathscr{U}} \|\chi_{A_i^k}-\chi_{B_i^k}\|_{L_p(\mu_i)}$, entonces basta probar que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|\chi_{A_i^k} - \chi_{B_i^k}\|_{L_p(\mu_i)} = 0$, y esto es cierto ya que $I_0 = \{i \in I \,|\, A_i^k = B_i^k\} \in \mathscr{U}$ para cada $1 \leq k \leq n$, de donde $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|\chi_{A_i^k} - \chi_{B_i^k}\|_{L_p(\mu_i)}$ $= \lim\limits_{i\in I_0,\mathscr{U}} \|\chi_{A_i^k} - \chi_{B_i^k}\|_{L_p(\mu_i)} = 0$, así $J(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\widetilde{A_k}}) = J(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{\widetilde{B_k}})$ si $\widetilde{A_k} = \widetilde{B_k}$ para cada $1 \leq k \leq n$.

Además J es lineal. Ya que la suma es asociativa basta demostrar que $J(\alpha\chi_{\widetilde{A}}+\beta\chi_{\widetilde{B}}) = \alpha J(\chi_{\widetilde{A}})+\beta J(\chi_{\widetilde{B}})$, lo cual se satisface ya que $J(\alpha\chi_{\widetilde{A}}+\beta\chi_{\widetilde{B}}) = J(\alpha\chi_{\widetilde{A}-\widetilde{B}}+(\alpha+\beta)\chi_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}+ \beta\chi_{\widetilde{B}-\widetilde{A}}) = \widetilde{(\alpha\chi_{A_i-B_i} + (\alpha+\beta)\chi_{A_i\cap B_i} + \beta\chi_{B_i-A_i})} = \widetilde{(\alpha\chi_{A_i} + \beta\chi_{B_i})} = \alpha\widetilde{(\chi_{A_i})} + \beta\widetilde{(\chi_{B_i})}$ $= \alpha J(\chi_{\widetilde{A}}) + \beta J(\chi_{\widetilde{B}})$.

También J es una isometría. Puesto que $\|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{(A_i^k)_{\mathscr{U}}}\|^p_{L_p(\widetilde{\mu})} = \sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|^p\, \widetilde{\mu}((A_i^k)_{\mathscr{U}}) =$ $\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|^p \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i^k) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|^p\, \mu_i(A_i^k) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_i^k}\|^p_{L_p(\mu_i)} = \|\widetilde{(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_i^k})}\|^p_{\mathscr{U}}$.
Ya que J admite una única extensión a $L_p(\widetilde{\mu})$ por ser una isometría lineal, entonces en adelante se considerará $L_p(\widetilde{\mu})$ como un subespacio de $(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ identificando $L_p(\widetilde{\mu})$ con su imagen $J(L_p(\widetilde{\mu}))$.

Lo que sigue está enfocado en la construcción de la proyección $\widetilde{P}$. Se fija $i \in I$, como las μ_i son finitas, entonces $L_p(\mu_i) \subset L_1(\mu_i)$, luego dados $A_i \in \sigma_i$ y $f_i \in L_p(\mu_i)$ se tiene que $\int_{A_i} f_i \,\mathrm{d}\mu_i$ existe.

Por otra parte, se supone $\sup\limits_{i\in I}\|f_i\|_{L_p(\mu_i)} = M < \infty$ entonces para cada $i \in I$ y $A_i \in \sigma_i$ se tiene $\int_{A_i} |f_i|\,\mathrm{d}\mu_i = \int_{A_i\cap\{|f_i|>1\}} |f_i|\,\mathrm{d}\mu_i + \int_{A_i\cap\{|f_i|\leq1\}} |f_i|\,\mathrm{d}\mu_i \leq \int_{A_i\cap\{|f_i|>1\}} |f_i|^p\,\mathrm{d}\mu_i +$ $\int_{A_i\cap\{|f_i|\leq1\}} 1\,\mathrm{d}\mu_i \leq M + \mu_i(A_i) \leq M + \sup\limits_{i\in I}\mu_i(\Omega_i) < \infty$, luego $\sup\limits_{i\in I}\|f_i\|_{L_1(\mu_i)} < \infty$, por lo tanto $\ell_\infty(L_p(\mu_i)) \subset \ell_\infty(L_1(\mu_i))$ de donde, si $\widetilde{(f_i)} \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ entonces $\widetilde{(f_i)} \in (L_1(\mu_i))_{\mathscr{U}}$, es decir $\|\widetilde{(f_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{\Omega_i} |f_i|\,\mathrm{d}\mu_i$ existe si $\widetilde{(f_i)} \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$.

Se toma $(A_i) \in \widetilde{(A_i)}$ fijo y $(f_i) \in \widetilde{(f_i)} \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$, entonces para cada $i \in I$ se cumple $|\int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i| \leq \int_{A_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i$ de donde $-\int_{\Omega_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i \leq -\int_{A_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i \leq \int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i$ $\leq \int_{A_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i \leq \int_{\Omega_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i$.

Ahora como $\lim_{\mathscr{U}} \int_{\Omega_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i$ existe para todo $\widetilde{(f_i)} \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$, entonces dado $\epsilon > 0$ se tiene que $= \{i \in I : |\int_{\Omega_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i - \lim_{\mathscr{U}} \int_{\Omega_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i| < \epsilon\} = I_0 \in \mathscr{U}$, luego se considera $L = \lim_{\mathscr{U}} \int_{\Omega_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i$, para cada $i \in I$ se tiene que $-L - \epsilon < \int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i < L + \epsilon$, por lo tanto $\lim_{\mathscr{U}} \int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i$ existe.

Dada $f = \widetilde{(f_i)} \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ se define $\widetilde{\nu}_f(\widetilde{A}) = \lim_{\mathscr{U}} \int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i$ para cada $\widetilde{A} = (A_i)_{\mathscr{U}}$ con $A_i \in \sigma_i$ para cada $i \in I \cdots (1)$

Se demostrará que $\widetilde{\nu}_f$ está bien definida. Para ello se consideran $(A_i)_{\mathscr{U}}$ fijo y $(f_i), (g_i) \in \widetilde{(f_i)}$, entonces para cada $i \in I$ se cumple $|\int_{A_i} (f_i - g_i) \, \mathrm{d}\mu_i| \leq \int_{\Omega_i} |f_i - g_i| \, \mathrm{d}\mu_i$, así:

$$\begin{aligned} |\lim_{\mathscr{U}} \int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i - \lim_{\mathscr{U}} \int_{A_i} g_i \, \mathrm{d}\mu_i| &\leq \lim_{\mathscr{U}} \int_{A_i} |f_i - g_i| \, \mathrm{d}\mu_i \\ &\leq \lim_{\mathscr{U}} \int_{\Omega_i} |f_i - g_i| \, \mathrm{d}\mu_i \\ &\leq \lim_{\mathscr{U}} \mu_i(\Omega_i)^{1-\frac{1}{p}} \lim_{\mathscr{U}} \|f_i - g_i\|_{L_p(\mu_i)} = 0 \end{aligned}$$

Se supone $(A_i)_{\mathscr{U}} = (B_i)_{\mathscr{U}}$ y $(f_i) \in \widetilde{(f_i)}$ fijo, entonces $I_0 = \{i \in I \mid A_i = B_i\} \in \mathscr{U}$, luego $\lim_{\mathscr{U}} \int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i = \lim_{i \in I_0, \mathscr{U}} \int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i = \lim_{i \in I_0, \mathscr{U}} \int_{B_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i = \lim_{\mathscr{U}} \int_{B_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i$.

Ya que para cada $i \in I$, se tiene que $\nu_i(A_i) = \int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i$ es una medida compleja en σ_i, entonces $|\nu_i|(A_i) = \int_{A_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i$ y como $\sup_{i \in I} |\nu_i|(\Omega_i) = \sup_{i \in I} \int |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i = \sup_{i \in I} \|f_i\|_{L_p(\mu_i)} = M < \infty$, se sigue que (1) satisface las hipótesis del Teorema 5, por lo tanto $\widetilde{\nu}_f$ induce una única medida compleja en $\widetilde{\sigma}$ y $|\widetilde{\nu}_f|(\widetilde{A}) = \lim_{\mathscr{U}} |\nu_i|(A_i) = \lim_{\mathscr{U}} \int_{A_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i$.

Se afirma que si $p > 1$, entonces $\widetilde{\nu}_f$ es absolutamente continua respecto a $\widetilde{\mu}$ para cada $f = \widetilde{(f_i)} \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$, para verificarlo sea $\widetilde{A} = (A_i)_{\mathscr{U}}$ con $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = 0$, luego $|\widetilde{\nu}_f(\widetilde{A})|$

$\leq |\widetilde{\nu}_f|(\widetilde{A}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \displaystyle\int_{A_i} |f_i| \,\mathrm{d}\mu_i \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i)^{1-\frac{1}{p}} (\int_{A_i} |f_i|^p \,\mathrm{d}\mu_i)^{\frac{1}{p}} = \widetilde{\mu}(\widetilde{A})^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}} = 0.$

Se define $\widetilde{P} : (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}} \to L_p(\widetilde{\mu})$ del modo siguiente, si $p > 1$ entonces $\widetilde{P}f$ es la derivada de Radon-Nikodým de $\widetilde{\nu}_f$ respecto a $\widetilde{\mu}$, si $p = 1$, se considera la parte absolutamente continua de $\widetilde{\nu}_f$ respecto a $\widetilde{\mu}$, cuya existencia garantiza el teorema de Lebesgue, y $\widetilde{P}f$ es la respectiva derivada de Radon-Nikodým.

Para $p \geq 1$, ya que $\widetilde{\mu}$ es finita, la derivada de Radon-Nikodým $\widetilde{P}f$, es una función $g \in L_1(\widetilde{\mu})$, se probará que $g \in L_p(\widetilde{\mu})$, que $\|g\|_{L_p(\widetilde{\mu})} \leq \|f\|_{\mathscr{U}}$ y que $\widetilde{P}$ es lineal.

Para demostrar la linealidad de $\widetilde{P}$, se observa que para todo $p > 1$, $\widetilde{E} = (E_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}$, $f = \widetilde{(f_i)}, g = \widetilde{(g_i)} \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ y λ escalar, se tiene que, $\displaystyle\int_{\widetilde{E}} \widetilde{P}(\lambda f + g) \,\mathrm{d}\widetilde{\mu} =$ $\widetilde{\nu}_{\lambda f+g}(\widetilde{E}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \displaystyle\int_{E_i} (\lambda f_i + g_i) \,\mathrm{d}\mu_i = \lambda \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{E_i} f_i \,\mathrm{d}\mu_i + \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{E_i} g_i \,\mathrm{d}\mu_i = \lambda\, \widetilde{\nu}_f(\widetilde{E}) + \widetilde{\nu}_g(\widetilde{E})$ $= \lambda \displaystyle\int_{\widetilde{E}} \widetilde{P}f \,\mathrm{d}\widetilde{\mu} + \int_{\widetilde{E}} \widetilde{P}g \,\mathrm{d}\widetilde{\mu} = \int_{\widetilde{E}} (\lambda \widetilde{P}f + \widetilde{P}g) \,\mathrm{d}\widetilde{\mu}$, de donde $\widetilde{P}(\lambda f + g) = \lambda \widetilde{P}f + \widetilde{P}g$ P-c.s.

Para $p = 1$, se observa que el teorema de Lebesgue sobre la descomposición de medidas en una absolutamente continua y otra singular, en realidad asegura la existencia de una proyección T, del espacio de medidas complejas $\mathbb{M}$, definidas en un espacio medible (Ω, σ), en el espacio de medidas absolutamente continuas respecto a una medida $\mu \in \mathbb{M}$ y dicha proyección es continua respecto a la variación total.

Luego en el caso que se está trabajando, si $\widetilde{T}\widetilde{\nu}_f$ representa la parte absolutamente continua de $\widetilde{\nu}_f$ respecto a $\widetilde{\mu}$, entonces se tiene que $\widetilde{T}\widetilde{\nu}_{\lambda f+g} = \widetilde{T}(\lambda \widetilde{\nu}_f + \widetilde{\nu}_g) = \lambda \widetilde{T}\widetilde{\nu}_f + \widetilde{T}\widetilde{\nu}_g$, de esto se sigue que se puede utilizar el mismo argumento que se empleó cuando $p > 1$, para demostrar que $\widetilde{P}$ es lineal si $P = 1$.

Para el caso $p = 1$, puesto que la descomposición dada por el teorema de Lebesgue son medidas mutuamente singulares, entonces si g es la derivada de Radon-Nikodým, se tiene que $\|g\|_1 = \widetilde{T}\widetilde{\nu}_f((\Omega_i)_{\mathscr{U}}) \leq \widetilde{\nu}_f((\Omega_i)_{\mathscr{U}}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \displaystyle\int_{\Omega_i} |f_i| \,\mathrm{d}\mu_i = \|\widetilde{(f_i)}\|_{\mathscr{U}}$.

Si $p > 1$, para demostrar que la derivada de Radon-Nikodým g, satisface $g \in L_p(\widetilde{\mu})$ y $\|g\|_{L_p(\widetilde{\mu})} \leq \|f\|_{\mathscr{U}}$, por la linealidad de la proyección $\widetilde{P}$, basta considerar $f \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ con $\|f\|_{\mathscr{U}} = 1$ y demostrar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\int_{\widetilde{A}_k} |g| \,\mathrm{d}\widetilde{\mu})^p}{\widetilde{\mu}(\widetilde{A}_k)^p} \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_k) \leq 1$ para toda partición $(\widetilde{A}_k)$ de $(\Omega_i)_{\mathscr{U}}$ con $A_k = (A_i^k)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}$ y $\widetilde{\mu}(A_k) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ya que $\displaystyle\int_{\widetilde{A}_k} |g| \, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = |\widetilde{\nu}_f|(\widetilde{A}_k) = \lim_{\mathscr{U}} \int_{\widetilde{A}_k} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i$ y $\frac{1}{\mu_i(A_i^k)^p} \|f_i\|_{1,A_i^k}^p \leq \frac{1}{\mu_i(A_i^k)} \|f_i\|_{p,A_i^k}^p$ para todo $i \in I$, donde $\|\cdot\|_{p,A}$ es la norma p restringida al conjunto A, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(\int_{\widetilde{A}_k} |g| \, \mathrm{d}\widetilde{\mu})^p}{\widetilde{\mu}(\widetilde{A}_k)^p} \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{A_k^i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i)^p}{\lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i^k)^p} \lim_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i^k) = \lim_{\mathscr{U}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\int_{A_k^i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu_i)^p}{\mu_i(A_i^k)^p} \mu_i(A_i^k)$$

$$\leq \lim_{\mathscr{U}} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_i^k} |f_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i = \|\widetilde{(f_i)}\|_{(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}}^p = 1.$$

Así $\widetilde{P} : (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}} \to L_p(\widetilde{\mu})$, dada $f \in L_p(\widetilde{\mu})$ con $f = \widetilde{(f_i)}$, se tiene que $\widetilde{P} f = f$ por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodým, luego $\widetilde{P}$ es una proyección.

Ya que $f = \widetilde{(f_i)} \geq 0$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que $f_i \geq 0$ para todo $i \in I$, luego si $f \geq 0$, se tiene que $\widetilde{P} f$ es la derivada de Radon-Nikodým de una medida que será positiva, ya que si $\widetilde{A} = (A_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}$, se tiene que $\widetilde{\nu}_f(\widetilde{A}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \displaystyle\int_{A_i} f_i \, \mathrm{d}\mu_i$ $= \lim\limits_{\mathscr{U}} \displaystyle\int_{A_i} (f_i \vee 0) \, \mathrm{d}\mu_i \geq 0$.

Para demostrar que $\widetilde{P} f \leq f$ para todo $f \geq 0$, se supone $g = \widetilde{P} f$ y $h = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\widetilde{A}_k}$ una función simple, con $\widetilde{A}_k = (A_i^k)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}$ para todo $1 \leq k \leq n$, entonces se considera $\epsilon > 0$, luego si $0 \leq h \leq g$, entonces dado $1 \leq k \leq n$, se afirma que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(\{f_i \leq c_k - \epsilon\} \cap A_i^k) = 0$, para demostrarlo se procede por contradicción.

Para $p \geq 1$, si $\lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(\{f_i \leq c_k - \epsilon\} \cap A_i^k) = 2r > 0$, entonces existe $I_r^k \in \mathscr{U}$ tal que si $i \in I_r^k$, entonces $\mu_i(\{f_i \leq c_k - \epsilon\} \cap A_i^k) > r$, se llama $B_i^k = \{f_i \leq c_k - \epsilon\} \cap A_i^k$ para cada $i \in I$, por construcción se tiene que $\widetilde{\mu}((B_i^k)_{\mathscr{U}}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(B_i^k) \geq r > 0$, luego como

$$\lim_{\mathscr{U}} \int_{B_i^k} f_i \, \mathrm{d}\mu_i = \widetilde{\nu}_f((B_i^k)_{\mathscr{U}}) \geq \int_{(B_i^k)_{\mathscr{U}}} g \, \mathrm{d}\widetilde{\mu} \geq \int_{(B_i^k)_{\mathscr{U}}} h \, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \int_{(B_i^k)_{\mathscr{U}}} c_k \, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = c_k \widetilde{\mu}((B_i^k)_{\mathscr{U}})$$

y $\lim\limits_{\mathscr{U}} \displaystyle\int_{B_i^k} f_i \, \mathrm{d}\mu_i = \lim_{\mathscr{U}_{I_r^k}} \int_{B_i^k} f_i \, \mathrm{d}\mu_i \leq \lim_{\mathscr{U}_{I_r^k}} \int_{B_i^k} (c_k - \epsilon) \, \mathrm{d}\mu_i = (c_k - \epsilon) \widetilde{\mu}((B_i^k)_{\mathscr{U}})$, se tiene una contradicción, por lo tanto $\lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(\{f_i \leq c_k - \epsilon\} \cap A_i^k) = 0$.

Se definen $C_i^k = \{f_i > c_k - \epsilon\} \cap A_i^k \subset A_i$, luego $C_i^k = A_i^k - \{f_i \leq c_k - \epsilon\} \cap A_i^k$, de donde $(C_i^k)_{\mathscr{U}} \subset (A_i^k)_{\mathscr{U}}$ y $\widetilde{\mu}((C_i^k)_{\mathscr{U}}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(C_i^k) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i^k) = \widetilde{\mu}((A_i^k)_{\mathscr{U}})$,

así $\chi_{(A_i^k)_{\mathscr{U}}} = \chi_{(C_i^k)_{\mathscr{U}}}$ $\widetilde{\mu}$-c.s. para cada $1 \leq k \leq n$, de donde $f = \widetilde{(f_i)} \geq \widetilde{(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{C_i^k})}$ $= \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(C_i^k)_{\mathscr{U}}} = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(A_i^k)_{\mathscr{U}}} = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\widetilde{A}_k} = h.$
Luego por la continuidad de $\widetilde{P}$ y la densidad de las funciones simples en $L_p(\widetilde{\mu})$, se sigue que $\widetilde{P} f \leq f$.

Por lo tanto $\widetilde{P}$ satisface las condiciones para ser una proyección de retículos de Banach, luego $Im(\widetilde{P})$ y $ker(\widetilde{P})$ son retículos de Banach, la prueba de dicha afirmación se puede consultar en [44].

Se consideran $f = \widetilde{(f_i)}, g = \widetilde{(g_i)} \in ker(\widetilde{P})$ con $f \wedge g = 0$, luego para cada $i \in I$ se definen $A_i = supp(f_i)$, $B_i = supp(g_i)$, se observa que al ser $f \wedge g = 0$, entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad que $f_i \wedge g_i = 0$ para todo $i \in I$, de donde $A_i \cap B_i = \emptyset$ para todo $i \in I$, por lo cual $\|f + g\|^p_{(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}} = \lim_{\mathscr{U}} \|f_i + g_i\|^p_{L_p(\mu_i)}$ $= \lim_{\mathscr{U}} \int |f_i + g_i|^p \,\mathrm{d}\mu_i = \lim_{\mathscr{U}} \int_{A_i \cup B_i} |f_i + g_i|^p \,\mathrm{d}\mu_i = \lim_{\mathscr{U}} \int_{A_i} |f_i|^p \,\mathrm{d}\mu_i + \lim_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |g_i|^p \,\mathrm{d}\mu_i$ $= \|f\|^p_{(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}} + \|g\|^p_{(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}}$, así $ker(\widetilde{P})$ es un L_p abstracto, entonces por el Teorema de Bohnenblust-Nakano, Teorema 7, se tiene que existe una medida ν tal que $L_p(\nu)$ es isomorfo, isométrico y retículo isomorfo a $ker(\widetilde{P})$.

Finalmente se demostrará que $\|f\|^p_{\mathscr{U}} = \|\widetilde{P} f\|^p_{\mathscr{U}} + \|(I - \widetilde{P}) f\|^p_{\mathscr{U}}$ para todo $f \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$, para probarlo se observa que $supp(\widetilde{\mu}) = (supp(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ ya que para todo $(A_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}$ se tiene que $\widetilde{\mu}(A_i)_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i) = \lim_{\mathscr{U}} \mu_i(A_i \cap supp(\mu_i)) = \widetilde{\mu}((A_i)_{\mathscr{U}} \cap (supp(\mu_i))_{\mathscr{U}})$.

Para cada $i \in I$ se llama $B_i = supp(\mu_i)$, entonces se consideran $f = \widetilde{(f_i)} \in Im(\widetilde{P})$ y $g = \widetilde{(g_i)} \in ker(\widetilde{P})$, luego dado que $\widetilde{(f_i)} \in Im(\widetilde{P})$ se sigue que $\widetilde{\nu}_f$ es absolutamente continua respecto a $\widetilde{\mu}$, de donde $supp(\widetilde{\nu}_f) \subset supp(\widetilde{\mu})$, además como $g \in ker(\widetilde{P})$, entonces se sigue que $\widetilde{\nu}_g$ tiene parte absolutamente continua respecto a $\widetilde{\mu}$ igual a 0, lo cual es equivalente a que $\widetilde{\nu}_g \perp \widetilde{\mu}$, es decir, $supp(\widetilde{\nu}_g) \subset supp(\widetilde{\mu})^c$.

Se observa que $\|f\|^p_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} \int |f_i|^p \,\mathrm{d}\mu_i = \widetilde{\nu}_f((\Omega_i)_{\mathscr{U}}) = \widetilde{\nu}_f((B_i)_{\mathscr{U}}) = \lim_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |f_i|^p \,\mathrm{d}\mu_i$ y $\lim_{\mathscr{U}} \int_{B_i^c} |f_i|^p \,\mathrm{d}\mu_i = \widetilde{\nu}_f((B_i)^c_{\mathscr{U}}) = 0$, de forma análoga se tiene $\|g\|^p_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} \int_{B_i^c} |g_i|^p \,\mathrm{d}\mu_i$

y $\lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i = 0$.

Luego $\lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |f_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i = \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |f_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i - \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i = \lim\limits_{\mathscr{U}} |\int_{B_i} |f_i|^p - |g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i|$ $\leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} ||f_i|^p - |g_i|^p| \, \mathrm{d}\mu_i \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |f_i + g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |f_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i + \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i$, de donde $\lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |f_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i = \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |f_i + g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i$, mediante un razonamiento semejante se prueba que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i^c} |g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i = \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i^c} |f_i + g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i$.

Así $\|f + g\|_{\mathscr{U}}^p = \lim\limits_{\mathscr{U}} \int |f_i + g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i = \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i} |f_i + g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i + \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{B_i^c} |f_i + g_i|^p \, \mathrm{d}\mu_i$ $= \|f\|_{\mathscr{U}}^p + \|g\|_{\mathscr{U}}^p$, ésto es equivalente a que $\|h\|_{\mathscr{U}}^p = \|\widetilde{P}h\|_{\mathscr{U}}^p + \|(I - \widetilde{P})h\|_{\mathscr{U}}^p$ para todo $h \in (L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$. ∎

Bajo las hipótesis del teorema anterior, es natural preguntarse cuando los elemento de $(L_p(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ pertenecen $L_p(\widetilde{\mu})$. Esto será de gran ayuda mas adelante para probar el resultado principal del presente trabajo, ya que algunas de las funciones en $L_p(\widetilde{\mu})$ se pueden expresar en términos cada una de las medidas μ_i, razón por la cual se tienen los siguientes resultados y definiciones.

***Definición* 9** (Familia Uniformemente Integrable)**.** *Sean μ una medida de probabilidad y F un subconjunto de $L_1(\mu)$, entonces se dirá que F es uniformemente integrable si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si E es medible con $\mu(E) < \delta$, entonces* $\sup\limits_{f \in F} \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < \epsilon$

Los subconjuntos de familias uniformemente integrables son uniformemente integrables.

Se observa que si $(f_i)_{i \in I}$ es una familia uniformemente integrable en $L_1(\mu)$ y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en I, entonces dada una familia $(E_i)_{i \in I}$ de conjuntos medibles, tales que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \mu(E_i) = 0$, para $\epsilon > 0$ existe $I' \in \mathscr{U}$ tal que $\mu(E_i) < \delta$, donde δ es aquel generado por la integrabilidad uniforme, luego $\lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{E_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu = \lim\limits_{\mathscr{U}_{I'}} \int_{E_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu \leq$ $\lim\limits_{\mathscr{U}} \sup\limits_{i \in I'} \int_{E_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu \leq \lim\limits_{\mathscr{U}_{I'}} \epsilon = \epsilon$, ya que $\epsilon > 0$ era cualquiera, se concluye $\lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{E_i} |f_i| \, \mathrm{d}\mu = 0$.

El siguiente es un conocido resultado clásico que caracteriza las familias uniformemente integrables, la prueba se encuentra en [1].

***Teorema* 11** (Dunford-Pettis)**.** *Sea F un subconjunto acotado de $L_1(\mu)$, con μ medida de probabilidad, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) F es relativamente débil compacto

2) F es uniformemente integrable

3) F no contiene una copia isomorfa de ℓ_1

4) F no contiene una copia isomorfa complementada de ℓ_1

5) Para cada sucesión (A_n) de conjuntos medibles ajenos por parejas se tiene que $\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in F} \int_{A_n} |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$

La siguiente proposición da condiciones para que un subconjunto de $(L_1(\mu_i))_{\mathscr{U}}$ sea un subconjunto de $L_1(\widetilde{\mu})$.

***Proposición* 21.** *Sea F una familia uniformemente integrable en $L_1(\mu)$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en un conjunto I, entonces el subconjunto $\widetilde{F}$ de $(L_1(\mu))_{\mathscr{U}}$ es un subconjunto de $L_1(\widetilde{\mu})$, donde $\widetilde{F} = \{\widetilde{f} \in (L_1(\mu))_{\mathscr{U}} \mid$ existe $(f_i) \in \widetilde{f}$ tal que $f_i \in F$ para cada $i \in I\}$.*

Demostración: Utilizando la notación del Teorema 10.

Sea $f = \widetilde{(f_i)} \in \widetilde{F}$, se sabe que $\widetilde{P}f$ es la parte absolutamente continua de $\widetilde{\nu}_f$ respecto a $\widetilde{\mu}$, se probará que $\widetilde{\nu}_f$ es absolutamente continua respecto a $\widetilde{\mu}$, para ello basta considerar $\widetilde{E} = (E_i)_{\mathscr{U}} \in \widetilde{\sigma}$ con $\widetilde{\mu}((E_i)_{\mathscr{U}}) = 0$, luego $|\widetilde{\nu}_f|(\widetilde{E}) = \lim_{\mathscr{U}} \int_{E_i} |f_i| \,\mathrm{d}\mu$, entonces por la segunda observación dada después de la Definición 9 de familia uniformemente integrable, se tiene que $|\widetilde{\nu}_f|(\widetilde{E}) = 0$, es decir, $\widetilde{\nu}_f$ es absolutamente continua respecto a $\widetilde{\mu}$.

Por lo tanto $\|f\|_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} \int |f_i| \,\mathrm{d}\mu_i = |\widetilde{\nu}_f|((\Omega)_{\mathscr{U}}) = \int |\widetilde{P}f| \,\mathrm{d}\widetilde{\mu} = \|\widetilde{P}f\|_{\mathscr{U}}$, entonces por el Teorema 10 se sabe que $\|f\|_{\mathscr{U}} = \|\widetilde{P}f\|_{\mathscr{U}} + \|(I-\widetilde{P})f\|_{\mathscr{U}}$, de donde $\|(I-\widetilde{P})f\|_{\mathscr{U}} = 0$, es decir, $f = \widetilde{P}f \in L_1(\widetilde{\mu})$. ∎

Ya que los elemento $\widetilde{(x_i)}$ de $(L_1(\mu))_{\mathscr{U}}$ que tienen un representante cuyas coordenadas están en un subconjunto uniformemente integrable de $L_1(\mu)$, al proyectarlos en $L_1(\widetilde{\mu})$ quedan invariantes, entonces es natural preguntarse si existe alguna relación explícita entre la función $\widetilde{(x_i)}$ en $L_1(\widetilde{\mu})$ y el elemento $\widetilde{(x_i)}$ visto en $(L_1(\mu))_{\mathscr{U}}$, la siguiente proposición da respuesta a dicha pregunta.

***Proposición* 22.** *Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia uniformemente integrable en $L_1(\mu)$, formada de elementos de valor real, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I que no es principal, entonces el elemento $\widetilde{x} = \widetilde{(x_i)} \in (L_1(\mu))_{\mathscr{U}}$, visto como función en $L_1(\widetilde{\mu})$ mediante la proyección dada en el Teorema 10, satisface $\widetilde{x}(\widetilde{(\omega_i)}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} x_i(\omega_i)$ $\widetilde{\mu}$-c.s. para cada $\widetilde{(\omega_i)} \in (\Omega)_{\mathscr{U}}$. En particular $\chi_{(A_i)_{\mathscr{U}}}(\widetilde{(\omega_i)}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \chi_{A_i}(\omega_i)$ para todo $\widetilde{(A_i)} \in \widetilde{\sigma}$ y $\widetilde{(\omega_i)} \in (\Omega)_{\mathscr{U}}$.*

Demostración: Se probará que la función $f(\widetilde{(\omega_i)}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} x_i(\omega_i)$ es medible.

Se supone que $\lim\limits_{\mathscr{U}} x_i(\omega_i)$ existe, esto siempre se puede ya que se considera el límite calculado dentro de la compactificación $\overline{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ dada al agregar los dos puntos al infinito $-\infty$ e ∞.

Sea $r \in \mathbb{R}$, se observa que $f(\widetilde{(\omega_i)}) \leq r$, si dado $\epsilon > 0$, existe $I_\epsilon \in \mathscr{U}$ tal que $x_i(\omega_i) < r + \epsilon$ para todo $i \in I_\epsilon$, por lo tanto $w_i \in x_i^{-1}(-\infty, r+\epsilon)$ para todo $i \in I_\epsilon$, así $\widetilde{(\omega_i)} \in (x_i^{-1}(-\infty, r+\epsilon))_{\mathscr{U}}$, donde $(x_i^{-1}(-\infty, r+\epsilon))_{\mathscr{U}}$ es el ultraproducto conjuntista, luego $\widetilde{(\omega_i)} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(f^{-1}(-\infty, r + \dfrac{1}{n}))_{\mathscr{U}}$.

Por el contrario, si $\widetilde{(\omega_i)} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(x_i^{-1}(-\infty, r+\dfrac{1}{n}))_{\mathscr{U}}$, entonces $\widetilde{(\omega_i)} \in (x_i^{-1}(-\infty, r+\frac{1}{n}))_{\mathscr{U}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se fija $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $I_n \in \mathbb{N}$ tal que $\omega_i \in x^{-1}(\infty, r+\frac{1}{n})$ si $i \in I_n$, es decir, $x_i(\omega_i) \in (\infty, r+\frac{1}{n})$ para todo $i \in I_n$, por lo tanto $\lim\limits_{\mathscr{U}} x_i(\omega_i)$ $= \lim\limits_{\mathscr{U}_{I_n}} x_i(\omega_i) \leq r + \frac{1}{n}$, así $\lim\limits_{\mathscr{U}} x_i(\omega_i) \leq r$.

Por el Teorema 10, el elemento $\widetilde{x}$ es la derivada de Radon-Nikodým de la medida $\widetilde{\nu}$ respecto a $\widetilde{\mu}$, donde $\widetilde{\nu}(\widetilde{E}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} \displaystyle\int_{E_i} x_i\mu_i$, con $\widetilde{E} = (E_i)_{\mathscr{U}}$ y $E_i \in \widetilde{\sigma}_i$ para cada $i \in I$.

Por la unicidad que garantiza el Teorema de Radon-Nikodým, basta probar que $\displaystyle\int_{\widetilde{E}} f \, d\widetilde{\mu} = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{x} \, d\widetilde{\mu}$ para todo $\widetilde{E} = (E_i)_{\mathscr{U}}$ con $E_i \in \widetilde{\sigma}$ para cada $i \in I$.

Para demostrar lo anterior es suficiente considerar $\widetilde{x} \geq 0$ y probar que para cada función simple $0 \leq \phi \leq \widetilde{x}$ se tiene que $\displaystyle\int_{\widetilde{E}} \phi \, d\widetilde{\mu} \leq \int_{\widetilde{E}} f \, d\widetilde{\mu}$ y que para cada función simple $0 \leq \phi \leq f$ se cumple $\displaystyle\int_{\widetilde{E}} \phi \, \mathrm{d}\widetilde{\mu} \leq \int_{\widetilde{E}} \widetilde{x} \, \mathrm{d}\widetilde{\mu}$.

Por la demostración del Teorema 10, se sabe que la colección de funciones de la forma $\widetilde{(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k})} \in (L_1(\mu))_{\mathscr{U}}$ define una familia funciones simples en $L_1(\widetilde{\mu})$ que son densas en $L_1(\widetilde{\mu})$.

Se toma $0 \leq \widetilde{(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k})} \leq \widetilde{x} = \widetilde{(x_i)}$, se sabe que se puede considerar $x_i \geq 0$ para todo $i \in I$ y se afirma que se puede suponer sin perdida de generalidad que para todo $i \in I$ se tiene que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k} \leq x_i$, para dar prueba de ello se observa que $\widetilde{(x_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k})} = \widetilde{((x_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}) \vee 0)}$, para simplificar se llama $y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}$, entonces se define:

$$y_i'(\omega) = \begin{cases} y_i(\omega) & , \text{si } \omega \in \{x_i \geq y_i\} \\ 0 & , \text{si } \omega \in \{y_i > x_i\} \end{cases}$$

Es directo de la definición que para cada $i \in I$ se tiene $y_i' \leq x_i$ y $x_i - y_i' = (x_i - y_i) \vee 0$, basta probar que $\widetilde{(y_i')} = \widetilde{(y_i)}$, entonces $\widetilde{(y_i - y_i')} = \widetilde{(y_i - x_i + x_i - y_i')} = \widetilde{(-(x_i - y_i))} + \widetilde{((x_i - y_i) \vee 0)} = -\widetilde{(x_i - y_i)} + \widetilde{(x_i - y_i)} = \widetilde{(0)}$.

Dado que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k} \leq x_i$ para todo $i \in I$, entonces para todo $\widetilde{(\omega_i)} \in (\Omega)_{\mathscr{U}}$ se tiene que $\lim_{\mathscr{U}} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}(\omega_i)) \leq \lim_{\mathscr{U}} x_i(\omega_i) = f(\widetilde{(\omega_i)})$, de donde $\displaystyle\int \lim_{\mathscr{U}} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}(\omega_i)) \, \mathrm{d}\widetilde{\mu}$ $\leq \displaystyle\int f(\widetilde{(\omega_i)}) \, \mathrm{d}\widetilde{\mu}$.

Se afirma que para toda función simple $\widetilde{(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k})} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{(E_i^k)_{\mathscr{U}}}$ se tiene que

$\displaystyle\int \lim_{\mathscr{U}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}(\omega_i)\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \lim_{\mathscr{U}} \int \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}\, \mathrm{d}\mu$, para ello se observa que:

$$\chi_{(A_i)_{\mathscr{U}}}(\widetilde{(\omega_i)}) = \begin{cases} 1 & \text{, si } \widetilde{(\omega_i)} \in (A_i)_{\mathscr{U}} \\ 0 & \text{,si } \widetilde{(\omega_i)} \notin (A_i)_{\mathscr{U}} \end{cases}$$

De donde $\chi_{(A_i)_{\mathscr{U}}}(\widetilde{(\omega_i)}) = 1$ si existe $I' \in \mathscr{U}$ tal que para todo $i \in I'$ se tiene que $\omega_i \in A_i$, por lo tanto $\lim_{\mathscr{U}} \chi_{A_i}(\omega_i) = \lim_{\mathscr{U}_I} \chi_{A_i}(\omega_i) = 1$.

Y $\chi_{(A_i)_{\mathscr{U}}}(\widetilde{(\omega_i)}) = 0$ si para cada $I' \in \mathscr{U}$ existe $i' \in I'$ tal que $\omega_{i'}$, luego $\lim_{\mathscr{U}} \chi_{A_i}(\omega_i) \neq 0$, como $\chi_{A_i}(\omega_i) \in \{0,1\}$ para todo $i \in I$ y $\{0,1\}$ es cerrado, entonces $\lim_{\mathscr{U}} \chi_{A_i}(\omega_i) = 0$.

Por lo tanto $\chi_{(A_i)_{\mathscr{U}}}(\widetilde{(\omega_i)}) = \lim_{\mathscr{U}} \chi_{A_i}(\omega_i)$ para todo $\widetilde{(A_i)} \in \widetilde{\sigma}$ y $\widetilde{(\omega_i)} \in (\Omega)_{\mathscr{U}}$.

Así $\displaystyle\int \lim_{\mathscr{U}} \chi_{A_i}(\omega_i)\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \int \chi_{(A_i)_{\mathscr{U}}}(\widetilde{(\omega_i)})\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu}((A_i)_{\mathscr{U}}) = \lim_{\mathscr{U}} \mu(A_i) = \lim_{\mathscr{U}} \int \chi_{A_i}(\omega)\, \mathrm{d}\mu$.

Así de la linealidad se sigue que $\displaystyle\int \lim_{\mathscr{U}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}(\omega_i)\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \lim_{\mathscr{U}} \int \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}\, \mathrm{d}\mu$.

Luego si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{(E_i^k)_{\mathscr{U}}} = \widetilde{(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}\, \mathrm{d}\mu)} \leq \widetilde{(x_i)}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{(E_i^k)_{\mathscr{U}}}\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} &= \sum_{k=1}^{n} \int \alpha_k \chi_{(E_i^k)_{\mathscr{U}}}\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \sum_{k=1}^{n} \lim_{\mathscr{U}} \int \alpha_k \chi_{E_i^k}\, \mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{\mathscr{U}} \int \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}\, \mathrm{d}\mu = \int \lim_{\mathscr{U}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}(\omega_i)\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} \\ &\leq \int f(\widetilde{(\omega_i)})\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} \end{aligned}$$

Se supone $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{(E_i^k)_{\mathscr{U}}} \leq f$, entonces $\widetilde{\mu}$-c.s. se tiene que $\displaystyle\lim_{\mathscr{U}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}(\omega_i) \leq \lim_{\mathscr{U}} x_i(\omega_i)$, de nuevo para simplificar se llaman $\displaystyle\widetilde{y} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{(E_i^k)_{\mathscr{U}}}$ y $\displaystyle y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_i^k}$ para cada $i \in I$, se observa que $\widetilde{y} = \widetilde{(y_i)}$.

Se definen $y_i' = y_i \wedge x_i$ para cada $i \in I$ y se llama $\widetilde{y}' = \widetilde{(y_i')}$, luego $\widetilde{y}' \leq \widetilde{x}$ y $\displaystyle\int \widetilde{y}'\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} \leq$

$\int \widetilde{x}\, \mathrm{d}\widetilde{\mu}$, solo resta probar que $\widetilde{y} = \widetilde{y}'$, para ello $\lim\limits_{\mathscr{U}} \int |y_i' - y_i|\, \mathrm{d}\mu = \lim\limits_{\mathscr{U}} \int |(y_i \wedge x_i) - y_i|\, \mathrm{d}\mu$ $= \lim\limits_{\mathscr{U}} \int |0 \wedge x_i|\, \mathrm{d}\mu = \lim\limits_{\mathscr{U}} 0 = 0.$

Lo anterior se pudo haber realizado considerando todas las funciones multiplicadas por una característica $\chi_{\widetilde{E}}$, de donde $\int_{\widetilde{E}} f\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{x}\, \mathrm{d}\widetilde{\mu}$ para todo $\widetilde{E} = (E_i)_{\mathscr{U}}$ con $E_i \in \widetilde{\sigma}$ para cada $i \in I$. ■

En la prueba del teorema anterior se dieron los siguientes resultados de forma implícita, dada su relevancia se presentan como el siguiente corolario.

***Corolario* 2.** *Dada una familia $(U_i)_{i \in I}$ de funciones medibles respecto a μ, de valor real, y un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en un conjunto I que no es principal, entonces la función $\widetilde{U}(\widetilde{(\omega_i)}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} U_i(\omega_i)$ es $\widetilde{\mu}$-medible.*

Además si $(x_i)_{i \in I}$ es una familia uniformemente integrable en $L_1(\mu)$, entonces la función $\widetilde{x} \in L_1(\widetilde{\mu})$, asociada a la familia $(x_i)_{i \in I}$ mediante la proyección dada en el Teorema 10 del espacio $(L_1(\mu))_{\mathscr{U}}$ en $L_1(\widetilde{\mu})$, satisface $\int_{\widetilde{E_i}} \widetilde{x}\, \mathrm{d}\widetilde{\mu} = \int_{\widetilde{E}} \lim\limits_{\mathscr{U}} x_i(\omega_i)\, \mathrm{d}\widetilde{\mu}$ $= \lim\limits_{\mathscr{U}} \int_{E_i} x_i\, \mathrm{d}\mu$ para cada $\widetilde{E} = (E_i)_{\mathscr{U}}$ con $E_i \in \sigma$ para toda $i \in I$.

2.2. Superpropiedades y representabilidad finita

El objetivo de las siguientes definiciones y resultados es expresar que dos espacios de Banach son muy semejantes, de dos formas:

1) Entre ellos se puede definir un isomorfismo que casi es una isometría

2) Los espacios finito dimensionales de uno son casi isométricos a los del otro

El material cubierto en esta sección se puede encontrar en [32].

La motivación del concepto que se definirá a continuación, es debida a James, ver [37].

***Definición* 10** (ϵ-isometría)**.** *Sean X y Y dos espacios de Banach y $0 < \epsilon < 1$, se dirá que $T : X \to Y$ es una ϵ-isometría si es un isomorfismo algebraico y satisface $(1 - \epsilon)\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1 + \epsilon)\|x\|$ para cada $x \in X$.*

Se sigue directo de la definición que toda ϵ-isometría T es un operador lineal acotado con norma no mayor a $1+\epsilon$ y norma de su inversa no mayor a $\frac{1}{1-\epsilon}$ de donde $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$.

Inversamente, si T es un isomorfismo acotado tal que $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$ entonces T es una ϵ-isometría.

Las observaciones anteriores, motivan la siguiente definición.

***Definición* 11** (Distancia de Banach-Mazur)**.** *Si X y Y son dos espacios de Banach, se define su distancia de Banach-Mazur*
$d(X,Y) = \text{ínf}\{\|T\|\|T^{-1}\| \,|\, T$ *es un isomorfismo acotado de X en Y*$\}$*, en caso de que X y Y no sean isomorfos, entonces se define $d(X,Y) = \infty$.*

De la definición anterior, se sigue que existe una ϵ-isometría entre dos espacios de Banach X y Y si y solo si $d(X,Y) \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$.

La distancia de Banach-Mazur no es una distancia, sin embargo es sub multiplicativa y dos espacios son isométricos si y solo si su distancia de Banach-Mazur es 1, por lo que $\log(d(\cdot,\cdot))$ es una distancia en la clase de los espacios de Banach isomorfos módulo isometría.

***Definición* 12** (Representabilidad finita)**.** *Sean X y Y dos espacios de Banach, entonces se dirá que Y es finitamente representable en X (f.r.) si para cada $\epsilon > 0$ y cada subespacio finito dimensional Y_0 de Y se tiene:*

1) *Existe X_0 subespacio de X con $dim(X_0) = dim(Y_0)$*

2) *Existe una ϵ-isometría de Y_0 en X_0*

En el caso de espacios de dimensión finita, ser finitamente representable es equivalente a ser isométrico isomorfo.

A continuación se presentan propiedades de la representabilidad finita.

***Lema* 8.** *Sean X, Y y Z espacios de Banach, entonces la relación de representabilidad finita satisface:*

1) *Es transitiva, es decir, si Y es f.r. en X y Z es f.r. en Y, entonces Z es f.r. en X*

2) *Es hereditaria, esto es, si H es un subespacio de Y y Y es f.r. en X, entonces H es f.r. en X, en particular todo subespacio de X es f.r. en X*

Demostración: 1) Sea $\epsilon > 0$ y Z_0 subespacio finito dimensional de Z, luego se escogen $0 < \nu, \eta < 1$ tales que $\nu + \eta + \nu\eta \leq \epsilon$, entonces existen Y_0 subespacio de Y, X_0 subespacio de X, T una ν-isometría de Z_0 en Y_0 y S una η-isometría de Y_0 en X_0, se afirma que $G = S \circ T$ es una ϵ-isometría de Z_0 en X_0.

Dado que $\nu + \eta + \nu\eta \leq \epsilon$, entonces $1 - \epsilon \leq (1-\nu)(q-\eta)$ y $(1-\eta)(1-\nu) \leq 1+\epsilon$, de donde $(1-\epsilon)\|z\| \leq (1-\nu)(q-\eta)\|z\| \leq \|Gz\| \leq (1-\eta)(1-\nu)\|z\| \leq (1+\epsilon)\|z\|$.

2) Es directo ya que todo subespacio finito dimensional de H es un subespacio finito dimensional de Y. ■

La representabilidad finita está fuertemente relacionada con los ulraproductos. En primer lugar se tiene que todo ultraproducto es finitamente representable en sus componentes.

Teorema 12. *Sean $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios de Banach y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I, entonces para cada $\widetilde{M}$ subespacio finito dimensional de $(X_i)_{\mathscr{U}}$ y $0 < \epsilon < 1$ existe $I_\epsilon \in \mathscr{U}$ tal que para cada $i \in I_\epsilon$ existe M_i subespacio de X_i con $d(\widetilde{M}, M_i) \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$.*

Demostración: Sea $\{\widetilde{x}_k \,|\, 1 \leq k \leq n\}$ una base normalizada de $\widetilde{M}$ y $0 < \epsilon < 1$, luego para cada $1 \leq k \leq n$ se puede escoger un $(x_i^k) \in \widetilde{x}_k$ tal que $\|x_i^k\|_{X_i} < 2$, para ello, se fija $1 \leq k \leq n$ y se escoge $(y_i^k) \in \widetilde{x}_k$, entonces como $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|y_i^k\|_{X_i} = 1$, existe $I_\epsilon^k \in \mathscr{U}$ tal que para cada $i \in I_\epsilon^k$ se tiene que $\|y_i^k\|_{X_i} < 1 + \epsilon < 2$, se define:

$$x_i^k = \begin{cases} y_i^k & , \text{si } i \in I_\epsilon^k \\ 0 & , \text{si } i \in (I_\epsilon^k)^c \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|y_i^k - x_i^k\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}_{I_\epsilon^k}} \|y_i^k - x_i^k\|_{X_i} = 0$, entonces $(x_i^k) \in \widetilde{x}_k$ y satisface $\|x_i^k\|_{X_i} < 2$ para todo $i \in I$.

Para cada $i \in I$ se definen $M_k =< x_i^k >_{1\leq k\leq n}$ y $T_i : \widetilde{M} \to M_i$ dada por $T_i(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \widetilde{x}_k)$ $= \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_i^k$. Ya que todas las normas en dimensión finita son equivalentes, entonces existe $\alpha = \sup\{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \,|\, \|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \widetilde{x}_k\|_{\mathscr{U}} = 1\}$, de donde para cada $i \in I$ se tiene $\|T_i\| \leq 2\alpha$.

Para cada $\widetilde{x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\widetilde{x}_k \in \widetilde{M}$ se define $I_{\widetilde{x}} = \{i \in I \,|\, (1-\frac{\epsilon}{2})\|\widetilde{x}\|_{\mathscr{U}} \leq \|T_i\widetilde{x}\|_{X_i} \leq$ $(1+\frac{\epsilon}{2})\|\widetilde{x}\|_{\mathscr{U}}\}$, como $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|T_i\widetilde{x}\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_i^k\|_{X_i} = \|\widetilde{(\sum_{k=1}^{n} a_k x_i^k)}\|_{\mathscr{U}} = \|\sum_{k=1}^{n} a_k \widetilde{(x_i^k)}\|_{\mathscr{U}}$ $= \|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\widetilde{x}_k\|_{\mathscr{U}} = \|\widetilde{x}\|_{\mathscr{U}}$, se tiene que $I_{\widetilde{x}} \in \mathscr{U}$.

Se considera $\delta = \frac{\epsilon}{4\alpha}$, por la compacidad de la bola unitaria en $\widetilde{M}$, se puede encontrar una δ-cubierta para la bola unitaria en $\widetilde{M}$, es decir, una colección finita $A = \{\widetilde{y}_s \,|\, 1 \leq s \leq N\}$ tal que para cada $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ con $\|\widetilde{x}\|_{\mathscr{U}} \leq 1$ existe $\widetilde{y} \in A$ con $\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\|_{\mathscr{U}} < \delta$.

Se llama $I_0 = \displaystyle\bigcap_{s=1}^{N} I_{\widetilde{y}_s} \in \mathscr{U}$ entonces dado $i \in I_0$ y $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ con $\|\widetilde{x}\|_{\mathscr{U}} = 1$, existe $\widetilde{y} \in A$ tal que $\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\|_{\mathscr{U}} < \delta$, así $\|T_i\widetilde{y}\|_{X_i} - \|T_i(\widetilde{x} - \widetilde{y})\|_{X_i} \leq \|T_i\widetilde{x}\|_{\leq} \|T_i\widetilde{y}\|_{X_i} + \|T_i(\widetilde{x} - \widetilde{y})\|_{X_i}$, luego por construcción se tiene que $1 - \epsilon = 1 - \frac{\epsilon}{2} - 2\alpha\delta \leq \|T_i\widetilde{x}\|_{X_i} \leq 1 + \frac{\epsilon}{2} - 2\alpha\delta$ $1 + \epsilon$, por lo tanto T_i es una ϵ-isometría si $i \in I_0$, de donde $d(\widetilde{M}, M) \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$. ■

Una consecuencia inmediate del teorema anterior es el siguiente corolario.

***Corolario* 3.** *Sea X un espacio de Banach y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en un conjunto I, entonces $(X)_{\mathscr{U}}$ es f.r. en X.*

Se sigue que dado un espacio de Banach X, la colección de espacios f.r. en X es muy grande.

Ya se ha probado que las ultrapotencias de X son finitamente representables en X, el siguiente teorema es el recíproco, en el sentido de que todo espacio f.r. en X es un subespacio de una ultrapotencia de X.

***Teorema* 13.** *Sean X y Y espacios de Banach, tales que Y es f.r. en X, entonces existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en un conjunto I de tal modo que Y está encajado isométrica isomorfamente en $(X)_{\mathscr{U}}$.*

Demostración: Por conveniencia se hará por casos:

1) Y es finito dimensional, entonces se considera $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, sea $\{y_1, \cdots y_m\}$ una base normalizada de Y, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe

X_n subespacio de X y T_n un $\frac{1}{n}$-isomorfismo de Y en X_n, para cada $1 \leq k \leq m$ se considera la sucesión $(T_n y_k)$, dado que $(1-\frac{1}{n})\|y_k\|_Y \leq \|T_n y_k\|X \leq (1+\frac{1}{n})\|y_k\|_Y \leq 2$, entonces $\widetilde{x}_k = \widetilde{(T_n x_k)} \in (X)_{\mathscr{U}}$ para cada $1 \leq k \leq m$.

Se afirma que $span(\widetilde{x}_k)_{1\leq k\leq m}$ es isomorfo isométrico a Y, para ello se considera la transformación lineal $T : Y \to (X)_{\mathscr{U}}$ dada por $T(\sum_{k=1}^{m} a_k y_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k \widetilde{x}_k$, solo resta probar que T es una isometría, para ello $\|\sum_{k=1}^{m} a_k \widetilde{x}_k\|_{\mathscr{U}} = \lim_{n,\mathscr{U}} \|\sum_{k=1}^{m} a_k T_n y_k\|_X$ $= \lim_{n} \|T_n(\sum_{k=1}^{m} a_k y_k)\|_X = \|\sum_{k=1}^{m} a_k y_k\|_Y$, así Y está encajado isomorfa e isométricamente en $(X)_{\mathscr{U}}$.

2) Y es infinito dimensional, llámese I a la colección de parejas (M, ϵ) donde M es un subespacio finito dimensional de Y y $0 < \epsilon < 1$, se define una relación $\prec$ en I dada por $(M, \epsilon) \prec (M', \epsilon')$ si y solo si $M \subset M'$ y $\epsilon' \leq \epsilon$, se observa que $\prec$ es un orden parcial puesto que $\subset$ y $\leq$ son ordenes parciales, mas aun, I con $\prec$ es un retículo, esto porque dados $(M, \epsilon), (M', \epsilon') \in I$ se tiene que $(M \cap M', \max\{\epsilon, \epsilon'\}) \prec (M, \epsilon), (M', \epsilon')$ y $(M + M', \min\{\epsilon, \epsilon'\}) \succ (M, \epsilon), (M', \epsilon')$.

Para cada $i_0 \in I$ se define $S(i_0) = \{i \in I \mid i_0 \prec i\}$, luego se llama $\mathscr{L} = \{S(i) \mid i \in I\}$, entonces como $(I, \prec)$ tiene estructura de retículo y $\mathscr{L}$ son las secciones finales de I, se tiene que $\mathscr{L}$ es una base de filtro, luego se puede extender a un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en I.

Dado que Y es f.r. en X, entonces para cada $(M_i, \epsilon_i) = i \in I$ se escoge una ϵ_i-isometria T_i de M_i en un X_i subespacio de X, se considera la transformación $J : Y \to (X)_{\mathscr{U}}$, dada por $Jy = \widetilde{(y_i)}$ donde:

$$y_i = \begin{cases} T_i y & \text{, si } y \in M_i \\ 0 & \text{, si } y \notin M_i \end{cases}$$

El operador J es lineal, para ello, se consideran $x, y \in Y$ y α escalar, luego se toman $0 < \epsilon_0 < 1$ fijo, $i_0 = (span(x) + span(y), \epsilon_0)$, entonces si $i \in S(i_0) \in \mathscr{U}$ se tiene que $\alpha x + y \in M_i$, de donde $T_i(\alpha x + y) = \alpha T_i x + T_i y$ para cada $i \in S(i_0)$, entonces se definen:

$$z_i = \begin{cases} T_i(\alpha x + y) & \text{, si } i \in S(i_0) \\ 0 & \text{, si } i \notin S(i_0) \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} T_i x & , \text{si } i \in S(i_0) \\ 0 & , \text{si } i \notin S(i_0) \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} T_i y & , \text{si } i \in S(i_0) \\ 0 & , \text{si } i \notin S(i_0) \end{cases}$$

Si $\widetilde{(w_i)} = J(\alpha x + y)$, entonces $\widetilde{(y_i)} = \widetilde{(z_i)}$, esto porque $S(i_0) \in \mathscr{U}$ y en consecuencia $\|\widetilde{(y_i)} - \widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} \|y_i - x_i\|_X = \lim_{\mathscr{U}_{S(i_0)}} \|y_i - x_i\|_X = 0$, de forma análoga se demuestra que $Jx = \widetilde{(x_i)}$ y $Jy = \widetilde{(y_i)}$, así $J(\alpha x + y) = \widetilde{(z_i)} = \alpha\widetilde{(x_i)} + \widetilde{(y_i)} = \alpha Jx + Jy$.

Por otra parte, J es una isometría, sea $y \in Y$ y $0 < \epsilon < 1$, se define $i_0 = (span(y), \epsilon)$, luego para cada $i \in S(i_0) \in \mathscr{U}$ se tiene que $(1-\epsilon)\|y\|_Y \leq (1-\epsilon_i)\|y\|_Y \leq \|T_i y\|_X \leq (1+\epsilon_i)\|y\|_Y \leq (1+\epsilon)\|y\|_Y$, entonces como $\|Jy\|_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} \|y_i\|_X = \lim_{\mathscr{U}_{S(i_0)}} \|T_i y\|_X$, se sigue que $(1-\epsilon)\|y\|_Y \leq \|Jy\|_{\mathscr{U}} \leq (1+\epsilon)\|y\|_Y$, al ser $0 < \epsilon < 1$ cualquiera, se concluye $\|Jy\|_{\mathscr{U}} = \|y\|_Y$. ■

De la demostración del teorema anterior se siguen dos resultados.

***Corolario* 4.** *Sea Y un espacio de Banach finito dimensional que es f.r en un espacio de Banach X, entonces para todo ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre $\mathbb{N}$ que no es principal, se tiene que Y está encajado isomorfa e isométricamente en $(X)_{\mathscr{U}}$.*

El siguiente corolario es la técnica que funciona como puente entre las propiedades finito dimensionales e infinito dimensionales en el siguiente sentido, si se tiene un espacio de Banach X y una colección $\mathscr{B}$ de espacios de Banach, de tal modo que los subespacios finito dimensionales de X son muy semejantes a subespacios finito dimensionales de elementos de $\mathscr{B}$, en el sentido de ϵ-isometrías, entonces se puede reconstruir todo X como un subespacio de una ultrapotencia de los elementos de $\mathscr{B}$, por ejemplo, $\mathscr{B}$ podría ser justamente la colección de subespacios finito dimensionales de X.

***Corolario* 5.** *Sea X un espacio de Banach y $\mathscr{B}$ una familia de espacios de Banach, de tal modo que para cada subespacio finito dimensional M de X y cada $0 < \epsilon < 1$, existe una ϵ-isometría de M en un subespacio de un espacio en $\mathscr{B}$, entonces existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en un conjunto I y una función de I en $\mathscr{B}$ que a cada $i \in I$ asocia un $E_i \in \mathscr{B}$, tal que X se encaja isomorfa e isométricamente en $(E_i)_{\mathscr{U}}$.*

Con el objetivo de estudiar las propiedades que se siguen bajo la representabilidad finita, es que se tiene la siguiente definición.

***Definición* 13** (Super propiedad)**.** *Sea P una propiedad definida en un espacio de Banach X, se dirá que X tiene la propiedad super-P si cada espacio finitamente representable en X tiene la propiedad P.*

El siguiente resultado emplea la representabilidad finita.

***Proposición* 23.** *Dado un espacio de Banach separable Y que es f.r. en un espacio de Banach X y un ultrafiltro numerablemente incompleto $\mathscr{U}$ en conjunto I, se tiene que Y se encaja isomorfa e isométricamente en $(X)_{\mathscr{U}}$.*

Demostración: Como $\mathscr{U}$ es numerablemente incompleto, existe una sucesión (I_n) en $\mathscr{U}$ tal que $I_{n+1} \subset I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap\limits_n I_n = \emptyset$, sea $\{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ un conjunto linealmente independiente tal que $\overline{span}(y_n)_{n\in N} = Y$, como Y es f.r. en X, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una $\frac{1}{n}$-isometría de $span(y_1, \cdots, y_n)$ en X.

Se define $J : span(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (X)_{\mathscr{U}}$ lineal mediante $Jy_m = \widetilde{(x_i^m)}$ donde:

$$x_i^m = \begin{cases} T_n y_m & \text{, si } n \geq m \text{ e } i \in I_n - I_{n+1} \\ 0 & \text{, si } i \in I - I_m \end{cases}$$

Se observa que dicha definición es correcta, ya que dado $m \in \mathbb{N}$, la colección $\{I - I_m, I_m - I_{m+1}, I_{m+1} - I_{m+2}, \cdots\}$ es una partición de I.

Se afirma que J es una isometría y por lo tanto tiene una extensión única a todo Y, para demostrarlo, dado $y = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k y_k \in span(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $n \geq m$ se tiene $(1 - \frac{1}{n})\|y\|_Y$ $\leq \|T_n y\|_X \leq (1 + \frac{1}{n})\|y\|_Y$, es decir, $(1 - \frac{1}{n})\|y\|_Y \leq \|\sum\limits_{k=1}^{m} a_k T_n y_k\|_X \leq (1 + \frac{1}{n})\|y\|_Y$, de donde $(1 - \frac{1}{n})\|y\|_Y \leq \|\sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_i^k\|_X \leq (1 + \frac{1}{n})\|y\|_Y$ para todo $n \geq m$ e $i \in I_n - I_{n+1}$, por lo tanto $(1 - \frac{1}{n})\|y\|_Y \leq \|\sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_i^k\|_X \leq (1 + \frac{1}{n})\|y\|_Y$ para todo $i \in I_n$, entonces como $\|Jy\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|\sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_i^k\|_X = \lim\limits_{\mathscr{U}_{I_n}} \|\sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_i^k\|_X$, se sigue que $(1 - \frac{1}{n})\|y\|_Y \leq \|Jy\|_{\mathscr{U}}$ $\leq (1 + \frac{1}{n})\|y\|_Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de donde $\|Jy\|_{\mathscr{U}} = \|y\|_Y$. ■

Luego dado un espacio de Banach X, sus ultrapotencias respecto a ultrafiltros numerablemente incompletos, capturan toda la información sobre los espacios separable f.r. X.

Otra consecuencia de los resultados anteriores es el siguiente corolario.

***Corolario* 6.** *Un espacio de Banach X es super reflexivo si y solo si para todo ultrafiltro $\mathscr{U}$ en un conjunto I, $(X)_{\mathscr{U}}$ es reflexivo.*

Demostración: Si X es super reflexivo, entonces como $(X)_{\mathscr{U}}$ es f.r. en X, se sigue que $(X)_{\mathscr{U}}$ es reflexivo.

Si toda ultrapotencia $(X)_{\mathscr{U}}$ de X es reflexiva, entonces dado Y espacio f.r. en X, se tiene que existe $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en un conjunto I tal que Y está encajado isométrica e isomorfamente en $(X)_{\mathscr{U}}$, de donde Y es reflexivo ya que todo subespacio cerrado de un espacio reflexivo es reflexivo, por lo tanto X es super reflexivo. ■

El siguiente resultado fue motivado al final del capítulo 2 cuando se definió el ultraproducto de operadores, ahora se dan las condiciones precisas y su prueba, mientras que su corolario queda caracterizado mediante una super propiedad, a saber, la super reflexividad.

***Teorema* 14.** *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios de Banach y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en I numerablemente incompleto, entonces $(X_i^*)_{\mathscr{U}} \simeq (X_i)^*_{\mathscr{U}}$ si y solo si $(X_i)_{\mathscr{U}}$ es reflexivo.*

Demostración: Se supone que $(X_i)_{\mathscr{U}}$ es reflexivo, que $(X^*)_{\mathscr{U}}$ mediante el encaje ϕ definido en la Proposición 19 no es todo $(X_i)^*_{\mathscr{U}}$ y se identifica $(X_i^*)_{\mathscr{U}}$ con su imagen bajo ϕ, luego existe $0 \neq \widetilde{x}^* \in (X_i)_{\mathscr{U}}$ tal que $\widetilde{x}^* \notin (X_i^*)_{\mathscr{U}}$, entonces $H = (X_i^*)_{\mathscr{U}} + span(\widetilde{x}^*)$ es un subespacio cerrado de $(X_i)^*_{\mathscr{U}}$.

Se define $f : H \to \mathbb{F}$ mediante $f(\lambda\widetilde{x}^* + \widetilde{y}) = \lambda\|\widetilde{x}^*\|$ con $\widetilde{y}^* \in (X_i^*)_{\mathscr{U}}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ y $\mathbb{F}$ la colección de escalares, f es un funcional acotado distinto de 0 que se anula en $(X_i)_{\mathscr{U}}$, luego por el Teorema de Han-Banach tiene una extensión g a todo $(X_i)^*_{\mathscr{U}}$ y como $(X_i)_{\mathscr{U}}$ es reflexivo, existe $\widetilde{x} = \widetilde{(x_i)} \in (X_i)_{\mathscr{U}}$ tal que $\widetilde{y}^*\widetilde{x} = f(\widetilde{y}^*)$ para todo $\widetilde{y}^* \in (X_i)^*_{\mathscr{U}} \cdots (\circledast)$.

Para cada $i \in I$ se escoge $f_i \in X_i^*$ tal que $f_i(x_i) = \|x_i\|_{X_i}$ y $\|f_i\| = 1$, luego $\widetilde{(f_i)_{\mathscr{U}}} \in (X_i^*)_{\mathscr{U}}$ y $\|(f_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} |f_i x_i| = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i}\ \|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} \neq 0$, lo cual contradice $(\circledast)$, por lo tanto $(X_i^*)_{\mathscr{U}} \simeq (X_i)^*_{\mathscr{U}}$.

Para demostrar el recíproco, se hará uso del Teorema de James el cual asegura que un espacio es reflexivo si y solo si todo funcional alcanza su norma en un elemento de la bola, ver [50].

Se supone que $\mathscr{U}$ es numerablemente incompleto y que $(X_i^*)_{\mathscr{U}} \simeq (X_i)^*_{\mathscr{U}}$, se toma $(f_i)_{\mathscr{U}} \in (X_i^*)_{\mathscr{U}}$ fijo, entonces existe una sucesión (I_n) decreciente en $\mathscr{U}$ con intersección vacía, se escogen para cada $n \in \mathbb{N}$ e $i \in I_n - I_{n+1}$ elementos $x_i' \in X_i$ con $\|x_i'\|_{X_i} = 1$ de tal modo que $f_i(x_i') \geq \|f_i\| - \frac{1}{n}$, obsérvese que $\bigcup_n I_n - I_{n+1} = I_1$ y que los elementos en la unión anterior son ajenos por parejas, luego $I = (\bigcup_n I_n - I_{n+1}) \cup I_1^c$ es una unión ajena por parejas, entonces se define:

$$x_i = \begin{cases} x_i' & \text{, si } i \in I_n - I_{n+1} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{, si } i \in I - I_1 \end{cases}$$

Se verifica que $\|\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_i\|_{X_i} = \lim\limits_{\mathscr{U}_{I_i}} \|x_i\|_{X_i} = 1$.

Luego dado $n \in \mathbb{N}$ se observa que $\lim\limits_{\mathscr{U}} |f_i(x_i)| = \lim\limits_{\mathscr{U}} f_i(x_i) = \lim\limits_{\mathscr{U}_{I_n}} f_i(x_i) \geq \lim\limits_{\mathscr{U}_{I_n}} \|f_i\| - \dfrac{1}{n}$ y ya que n fue cualesquiera, se concluye que $\|(f_i)_{\mathscr{U}}\|_{\mathscr{U}} \geq \|(f_i)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_i)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} |f_i(x_i)|$ $\geq \lim\limits_{\mathscr{U}} \|f_i\| = \|(f_i)_{\mathscr{U}}\|_{\mathscr{U}}$, por lo que $(X_i)_{\mathscr{U}}$ es reflexivo. ■

Una consecuencia inmediata es el siguiente corolario.

Corolario 7. *Sea X un espacio de Banach y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro numerablemente incompleto en un conjunto I, entonces $(X^*)_{\mathscr{U}} \simeq (X)^*_{\mathscr{U}}$ si y solo si X es super reflexivo.*

Demostración: Si X es super reflexivo y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro numerablemente incompleto en un conjunto I, entonces como $(X)_{\mathscr{U}}$ es f.r. en X, se sigue que $(X)_{\mathscr{U}}$ es reflexivo de donde $(X^*)_{\mathscr{U}} \simeq (X)^*_{\mathscr{U}}$.

Para la demostración del recíproco se utiliza la siguiente equivalencia cuya demostración se puede encontrar en [50], Un espacio es reflexivo si y solo si todo subespacio cerrado y separable es reflexivo.

Si X no es super reflexivo, entonces existe un espacio Y no reflexivo que es f.r. en X, luego como todo espacio no reflexivo tiene un subespacio separable no reflexivo, entonces existe H subespacio separable de Y que no es reflexivo, de donde H es f.r. en X, entonces como todo espacio separable se encaja isométricamente en toda ultrapotencia respecto a un ultrafiltro numerablemente incompleto de un espacio en el que es f.r., se sigue que H está encajado isométricamente en $(X)_{\mathscr{U}}$, de donde $(X)_{\mathscr{U}}$

no es reflexivo, así $(X^*)_{\mathscr{U}}$ no es isomorfo isométrico a $(X)^*_{\mathscr{U}}$. ■

El siguiente teorema es un resultado de Kirk, asegura que todo subespacio reflexivo de $L_1(\mu)$ es super reflexivo, la demostración se encuentra en [40].

***Teorema* 15.** *Sea μ una medida de probabilidad y Y un subespacio cerrado y reflexivo de $L_1(\mu)$, entonces Y es super reflexivo.*

2.3. Probabilidades aleatorias

El objetivo de esta sección es mostrar un teorema que en esencia garantiza la existencia de una sucesión adecuada en $L_1(\mu)$ con soportes ajenos, la herramienta usada son probabilidades aleatorias, cuya definición se encuentra a continuación.

***Definición* 14** (Probabilidad aleatoria)**.** *Sea (Ω, σ, P) un espacio de probabilidad y $P(\mathbb{C})$ la colección de medidas de probabilidad en $\mathbb{C}$, entonces una probabilidad aleatoria es una función $\mu : \Omega \to P(\mathbb{C})$ tal que para cada función $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua y acotada se tiene que la función $f_\rho : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $f_\rho(\omega) = \int \rho(u)\mu(\omega)(\,\mathrm{d}u)$ es medible.*

Si μ es una medida aleatoria en un espacio (Ω, σ, P) entonces se denotará $\mu = (\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$.

Llámese $C(\mathbb{C})$ a la colección de funciones continuas acotadas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, es sabido que $(C(\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, luego se define $B = B(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$ $= \{f : \Omega \to C(\mathbb{C}) \mid \int \|f_\omega\|_\infty \,\mathrm{d}P(\omega) < \infty\}$, donde $f_\omega = f(\omega, \cdot)$, este espacio es conocido como la colección de funciones *Bochner integrables* de Ω en $C(\mathbb{C})$, se puede probar que es un espacio vectorial bajo las operaciones puntuales, con una seminorma continua $|||f||| = \int \|f_\omega\|_\infty \,\mathrm{d}P(\omega)$, cuyo kernel será llamado K luego se define $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C})) = {}^{B}/_{K}$, se tiene que $f, g \in B$ pertenecen a la misma clase en $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$ si y solo si $\int \|f_\omega - g_\omega\|_\infty \,\mathrm{d}P(\omega) = 0$, la construcción de funciones Bochner integrables y su relación con $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$ se puede encontrar en [19].

Cada probabilidad aleatoria μ en un espacio (Ω, σ, P) puede ser identificada con un $< \mu, \cdot > \in L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))^*$ mediante $< \mu, f > = \int f(\omega, u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}P(\omega) = E(\int f(\omega, u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u))$ donde E es la integral sobre (Ω, σ, P), tal identificación está bien definida ya que si $E\|f_\omega - g_\omega\|_\infty = 0$ entonces

$$\begin{aligned}|<\mu, f> - <\mu, g>| &= |\int (f(\omega,u) - g(\omega,u))\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}P(\omega)| \\ &\leq \int |f(\omega,u) - g(\omega,u)|\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}P(\omega) \\ &\leq \int \|f_\omega - g_\omega\|_\infty \mu_\omega(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}P(\omega) \leq E\|f_\omega - g_\omega\|_\infty = 0.\end{aligned}$$

De hecho se puede probar mucho más, se toma la colección $\mathbb{M}$ de medidas con signo finitas en $\mathbb{C}$, ya que este es un espacio de Banach respecto a la variación total, se considera el espacio $\ell_\infty(\mathbb{M}_\omega)_{\omega\in\Omega}$, se puede probar que el subconjunto A de $\ell_\infty(\mathbb{M}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ tal que para cada $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega} \in A$ y cada $f \in L_1(\Omega,\sigma,P,C(\mathbb{C}))$ la función $h(\omega) = \int f(\omega,u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)$ es medible, es un subespacio de Banach, luego se toma el cociente de este espacio dado por la relación ser iguales P-c.s., es decir, $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ está relacionada con $(\nu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ si $\{\omega \in \Omega \,|\, \mu_\omega \neq \nu_\omega\}$ tiene probabilidad 0, dicho cociente es llamado $\mathbb{A}$.

Luego se toma $T : \mathbb{A} \to L_1(\Omega,\sigma,P,C(\mathbb{C}))^*$ donde $T\mu =<\mu,\cdot>$, se puede probar que esta es una transformación lineal isométrica, por lo tanto las probabilidades aleatorias pueden ser vistas como un subconjunto de la bola unitaria de $L_1(\Omega,\sigma,P,C(\mathbb{C}))^*$.

A cada $x \in L_1(P)$, se le puede asociar la probabilidad aleatoria $\mu_x = (\delta_{x(\omega)})_{\omega\in\Omega}$ donde δ_y es la medida de Dirac en y definida en $\mathbb{C}$, es decir, para cada $E \subset \mathbb{C}$ se tiene:

$$\delta_y(E) = \begin{cases} 1 & \text{, si } y \in E \\ 0 & \text{, si } y \notin E \end{cases}$$

Se observa que $\int f(u)\mu_{x(\omega)}(\,\mathrm{d}u) = f(x(\omega))$ para cada $f \in C(\mathbb{C})$ y se afirma que $\|x^*\| \leq 1$ donde x^* es la identificación de μ_x en $L_1(\Omega,\sigma,P,C(\mathbb{C}))^*$, para mostrarlo se toma $f \in L_1(\Omega,\sigma,P,C(\mathbb{C}))$ con $\|f\| = 1$, luego $|x^*f| = |\int f(\omega,u)\delta_{x(\omega)}(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}P(\omega)|$ $= |E(\int f(\omega,u)\delta_{x(\omega)}(\,\mathrm{d}u))| = |Ef(\omega,x(\omega))| \leq E|f(\omega,x(\omega))| \leq E\|f_\omega\|_\infty = \|f\| = 1$, así $\|x^*\| \leq 1$.

Al igual que se puede obtener una probabilidad aleatoria asociada a una función $x \in L_1(P)$, las sucesiones (x_n) en $L_1(P)$ inducen un funcional en $L_1(\Omega,\sigma,P,C(\mathbb{C}))$ del modo siguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n tiene una probabilidad aleatoria asociada $\mu_n = \mu_{x_n}$, identificada con un elemento $x_n^* \in L_1(\Omega,\sigma,P,C(\mathbb{C}))^*$, ya que $\|x_n^*\| \leq 1$, entonces dado $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, por el Teorema de Banach-Alaoglu existe $<\mu,\cdot> = \omega^* - \lim\limits_{\mathscr{U}} x_n^*$.

Se afirma que para toda $f \in L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$ se satisface $< \mu, f >= \lim\limits_{n,\mathscr{U}} < \mu_n, f >$ $= \lim\limits_{n,\mathscr{U}} E(f(\omega, x_n(\omega))) = \lim\limits_{n,\mathscr{U}} \displaystyle\int f(\omega, x_n(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega)$, para dar prueba de ello, se observa que dado $\epsilon > 0$, $V = V(\epsilon, f, \mu) = \{\nu \in L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))^* \,|\, |< \mu, f > -\nu(f)| < \epsilon\}$ es una ω^*-vecindad básica, de donde existe $I_V \in \mathscr{U}$ tal que $\mu_n \in V$ si $n \in I_V$, es decir, $|< \mu, f > - < \mu_n, f >| < \epsilon$ si $n \in I_V$, esto es que $< \mu, f >= \lim\limits_{n,\mathscr{U}} < \mu_n, f > \cdots (1)$.

El límite (1) también es válido para funciones medibles cuyo crecimiento no es mas grande que el de $|u|$ en ∞, en el siguiente sentido, se considera $f : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ medible, tal que $|f(\omega, u)| \leq M|u| + g(\omega)$ para algunos $M > 0$ y $g \in L_1(P)$ y se supone que (x_n) es $\| \|_1$-acotada, entonces $< \mu, f >:= \lim\limits_{n,\mathscr{U}} < \mu_n, f >$ existe, donde $< \mu_n, f >$ $= E(f(\omega, x_n(\omega))) = \int f(\omega, x_n(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega)$, se observa que la definición de $< \mu, f >$ coincide con (1) para funciones en $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$, es decir, es una generalización.

Solo resta probar que $< \mu, f >$ existe, esto porque, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $|< \mu_n, f >| = |\int f(\omega, x_n(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega)| \leq \int |f(\omega, x_n(\omega))|\,\mathrm{d}P(\omega) \leq M \int |x_n(\omega)|\,\mathrm{d}P(\omega) +$ $\int g(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega) < M \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_1 + \|g\|_1 < \infty$, luego $(< \mu_n, f >)$ es una sucesión acotada y en consecuencia $< \mu, f >$ existe.

Los resultados dados hasta el momento sobre probabilidades aleatorias se resumen a continuación.

***Proposición* 24.** *Sea $x \in L_1(P)$, (x_n) sucesión en $L_1(P)$, $f \in L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces se tiene:*

1) *Cada probabilidad aleatoria $\mu = (\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ induce un funcional $< \mu, \cdot >$ de norma no mayor a 1 en $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$ dado por $< \mu, f >= \int f(\omega, u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}P(\omega)$ $= E(\int f(\omega, u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u))$ con E la integral respecto a P*

2) *x induce una probabilidad aleatoria $\mu_x = (\delta_{x(\omega)})_{\omega\in\Omega}$, con δ_y medida de Dirac en $\mathbb{C}$*

3) *(x_n) induce un funcional en $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$, definido como $< \mu, \cdot > = \omega^* -$ $\lim\limits_{\mathscr{U}} \mu_{x_n}$ que satisface $< \mu, f > = \lim\limits_{\mathscr{U}} < \mu_{x_n}, f > = \lim\limits_{\mathscr{U}} E(f(\omega, x_n(\omega))) =$ $\lim\limits_{\mathscr{U}} \displaystyle\int f(\omega, x_n(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega)$*

Si adicionalmente se pide que (x_n) sea $\|\cdot\|_1$-acotada y $g : \omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es medible tal que $|f(\omega, u)| \leq M|u| + g(\omega)$ para algunos $M > 0$ y $g \in L_1(P)$ entonces se tiene:

4) Si se define $<\mu_n, f>= \int f(\omega, x_n(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega)$*, entonces el límite* $<\mu, f>= \lim\limits_{\mathscr{U}} <\mu_n, f>$ *existe*

Si (x_n) es una sucesión en $L_1(P)$, ω-convergente a un $x \in L_1(P)$ entonces es acotada, por lo que satisface las hipótesis de la proposición anterior, lo mismo para sucesiones uniformemente integrables.

De nuevo, si (x_n) es ω-convergente a x en $L_1(P)$, entonces la Proposición 24 asegura la existencia de un funcional $<\mu, \cdot>$ el cual es el ω^*-límite de los funcionales $<\mu_n, \cdot>$ asociados a la sucesión (x_n), respecto al ultrafiltro $\mathscr{U}$, de donde resulta natural preguntarse si existe alguna relación entre el funcional ω^*-límite $<\mu, \cdot>$ y el funcional $<\mu_x, \cdot>$, asociado al ω-límite x de (x_n).

La pregunta anterior es equivalente a preguntarse si la transformación $T : L_1(P) \to L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))^*$ dada mediante $Tx =<\mu_x, \cdot>$ es $\omega - \omega^*$-$\mathscr{U}$ continua, o bajo un debilitamiento, si $Im(T)$ es ω^* cerrado. El operador T no es lineal.

Si a un elemento en $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))^*$, se le dice que es *representable* cuando es imagen de algún elemento de $L_1(P)$ bajo T, entonces la pregunta de los párrafos anteriores es equivalente a preguntarse por los funcionales en $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$ que son representables.

Lo anterior se puede ver desde otro enfoque el cual es equivalente [14, 45, 58], se dirá que una medida μ en $\Omega \times \mathbb{C}$ es una *medida de Young*, si para cada conjunto E medible respecto a P, se tiene que $\mu(E \times \mathbb{C}) = P(E)$, es decir, es una medida en el producto de tal modo que su proyección respecto al primer espacio coincide con la medida original de dicho espacio, de hecho, el concepto de medida de Young es más general que el de probabilidad aleatoria, siendo el segundo un caso particular del primero, más información sobre las medidas de Young se encuentra en las referencias presentadas al principio del párrafo.

Toda medida de Young μ induce un funcional sobre $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$, dado mediante $<\mu, f>= \displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu$, en adelante se considerarán las medidas de Young identificadas en $L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))^*$.

A cada elemento $x \in L_1(P)$ se le puede asociar una medida de Young μ dada del modo siguiente $\mu(E \times A) = P(E \cap x^{-1}(A))$ para todo E medible respecto a P y A medible en $\mathbb{C}$, la cual satisface $\displaystyle\int_{\Omega\times\mathbb{C}} f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f(\omega, x(\omega))P(\,\mathrm{d}\omega)$ para toda $f \in$

$L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$, se observa que dicha medida de Young coincide con la probabilidad aleatoria $\mu = (\mu_{x(\omega)})_{\omega\in\Omega}$ ya que $\displaystyle\int_\Omega f(\omega, x(\omega))P(\,\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega f(\omega, u)\delta_{x(\omega)}(\,\mathrm{d}u)P(\,\mathrm{d}\omega)$, recuérdese que μ_x está asociada al funcional $< \mu_x, \cdot >$, cuya existencia se aseguró en la Proposición 24, la cual desde el enfoque de las medidas de Young es un caso particular del Teorema de Prohorov, el cual se puede consultar en [58].

Desde el enfoque de las medidas de Young, el proceso de expresar la medida μ mediante la probabilidad aleatoria $(\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es llamado *desintegración*, luego si una medida de Young es representable, entonces se puede desintegrar, por el contrario, se puede probar que no toda medida de Young es representable, por lo que la pregunta acerca de la ω a ω^*-$\mathscr{U}$ continuidad de T no es trivial.

Pese a que no toda medida de Young es representable, se puede asegurar que el ω^*-límite de medidas de Young inducidas por una sucesión uniformemente integrable en $L_1(P)$ es desintegrable, dicho resultado se puede encontrar en [45] y se presenta a continuación.

***Teorema* 16.** *Sea (x_n) una sucesión uniformemente integrable en $L_1(P)$, (μ_n) la familia de las respectivas medidas de Young asociadas a (x_n), entonces existe una subsucesión (μ_{n_k}) de tal modo que $\mu = \omega^*\text{-}\lim_k \mu_{n_k}$ existe y es desintegrable.*

El teorema anterior de hecho asegura la ω^*-compacidad relativa del conjunto $\{\mu_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ cuando $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente ω-compacto.

A los límites ω^* de medidas de Young se les llama Narrow Limits, dichos límites son únicos, sin embargo dada una sucesión de medidas de Young, esta puede tener mas de un punto ω^*-adherente, mas adelante se darán condiciones para asegurar la unicidad.

En general, existen resultados que garantizan la $\omega - \omega^*$-$\mathscr{U}$ continuidad de T, pero estos requieren que (x_n) converja en medida a x y esto sumado a la ω-convergencia de (x_n), ya que (x_n) es una sucesión en $L_1(P)$, implican la convergencia en $\|\cdot\|_1$ de (x_n) a x, como se verá mas adelante, dichas hipótesis serán imposibles de suponer, por lo que en general sin hipótesis adicionales no se podrá garantizar la $\omega - \omega^*$-$\mathscr{U}$ continuidad de T.

Si se supone que la sucesión (x_n) está en un subespacio reflexivo y separable de $L_1(\mu)$, entonces se puede garantizar la unicidad del límite de las respectivas medidas de Young asociadas (μ_n), así como propiedades deseables, si además se tiene convergencia en $\|\cdot\|_1$ de (x_n) a x, entonces se puede asegurar la ω a ω^*-$\mathscr{U}$ continuidad de T en x, lo anterior es consecuencia de una serie de resultados de Balder [3, 4], los cuales están relacionados al Teorema de Prohorov.

El siguiente teorema, es una combinación de varios de los resultados probados por Balder y cuya prueba se encuentra en [3, 4].

***Teorema* 17.** *Sea (x_n) una sucesión en $L_1(P)$ que es ω-convergente a un $x \in L_1(P)$, de tal modo que existe un subespacio X, cerrado, reflexivo y separable de $L_1(P)$ que contiene a (x_n) y x, entonces (x_n) induce una única probabilidad aleatoria μ, si adicionalmente se supone convergencia en medida de (x_n) a x, entonces se tiene que $\mu = (\delta_{x(\omega)})_{\omega\in\Omega}$.*

En otras palabras, para cada subsucesión (x_{n_k}) de (x_n), existe una subsucesión $(x_{n_{k_j}})$ de (x_{n_k}) y una medida de Young μ, de tal modo que:

1) *La sucesión de funcionales $(<\mu_{n_{k_j}}, \cdot>)$ asociados a las funciones $x_{n_{k_j}}$, convergen ω^* al funcional $<\mu, \cdot>$ inducido por μ*

2) *$x(\omega) = \displaystyle\int u\mu_\omega(\,\mathrm{du})$ P-c.s., donde $\mu = (\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$*

Si adicionalmente (x_n) converge a x en medida

3) *μ es la probabilidad aleatoria asociada a x, es decir, $\mu = (\mu_{x(\omega)})_{\omega\in\Omega}$*

El teorema anterior garantiza que el funcional asociado a una sucesión (x_n) ω-convergente a x es de hecho una probabilidad aleatoria y es única, por lo tanto no depende de la elección del ultrafiltro, de donde se puede calcular como un límite ω^* sin necesidad de ultrafiltros, pasando por subsucesiones si fuese necesario, se observa que lo anterior solo se asegura cuando la sucesión (x_n) está en un subespacio cerrado, reflexivo y separable de $L_1(P)$.

Si (x_n) es una sucesión ω convergente en $L_1(P)$, de tal modo que está definida en un subespacio cerrado, reflexivo y separable de $L_1(P)$, la probabilidad aleatoria μ cuya existencia garantiza el teorema anterior, será llamada la *probabilidad aleatoria inducida* por (x_n).

Si (x_n) es una sucesión uniformemente integrable en $L_1(P)$ definida en un subespacio cerrado y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces por la Proposición 24, a (x_n) se le puede asociar un funcional $<\mu, \cdot>$, el cual por el Teorema 16 induce una medida de Young μ, la cual admite una desintegración $\mu = (\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$, teniendo así una *probabilidad aleatoria asociada* a una sucesión (x_n) uniformemente integrable y a un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en $\mathbb{N}$ que no es principal.

Por lo tanto $\lim_{n,\mathscr{U}} E(f(\omega, x_n(\omega)) = \int f(\omega,u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)P(\,\mathrm{d}\omega) = E\int f(\omega,u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)$ para toda $f \in L_1(\Omega,\sigma,P,C(\mathbb{C}))$ o f con un crecimiento menor al de $|u|$ en ∞, en el caso $f \in L_1(\Omega,\sigma,P,C(\mathbb{C}))$ el límite anterior se pueden calcular sucesionalmente sin necesidad de ultrafiltros pasando por subsucesiones.

Para simplificar la notación, si $\mu = (\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es una probabilidad aleatoria, entonces $E(\int f\mu(\,\mathrm{d}u)) = E(\int f\mu_\omega(\,\mathrm{d}u))$, para toda f de tal modo que la integral del lado derecho de la igualdad exista.

El siguiente resultado relaciona los límites de las normas de sucesiones ω-convergentes en $L_1(P)$, con cierta evaluación en el funcional inducido por la probabilidad aleatoria asociada a dichas sucesiones.

***Proposición* 25.** *Sean (x_n) una sucesión en $L_1(P)$ que es ω-convergente a $x \in L_1(P)$, de tal modo que existe un subespacio cerrado X de $L_1(P)$ que es reflexivo y separable con (x_n) y x en X, μ la probabilidad aleatoria asociada a (x_n) y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces:*

1) $\lim_{\mathscr{U}} \|x_n\|_1 = E(\int |u|\mu(\,\mathrm{d}u))$

2) $\lim_{\mathscr{U}} \|x_n - y\|_1 = E(\int |y(\omega) - u|\mu(\,\mathrm{d}u))$

3) $\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{U}} \|x_n - x_m\|_1 = E(\int |v-u|\mu(\,\mathrm{d}u)\mu(\,\mathrm{d}v))$

4) $x(\omega) = \int u\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)$ *P-c.s.*

Demostración: 1), Se considera la función $f(\omega,u) = |u|$ para todo $\omega \in \Omega$ y $u \in \mathbb{C}$, ya que f no crece mas rápido que $|u|$ en ∞, entonces por la Proposición 24, los Teoremas 16 y 17 y las observaciones dadas después del Teorema 17, se tiene que $\lim_{\mathscr{U}} \|x_n\|_1 = \lim_{\mathscr{U}} E|x_n| = E(\int |u|\mu\,\mathrm{d}(u))$.

2), Dada $y \in L_1(P)$ se considera la función $f(\omega,u) = |y - y(\omega)| \leq |u| + |y(\omega)|$, de donde f no crece mas rápido que $|u|$ en ∞, por lo tanto, aplicando el mismo argumento del inciso 1), se tiene que $\lim_{\mathscr{U}} \|x_n - y\| = \lim_{\mathscr{U}} E|x_n - y| = E\int |u - y(\omega)|\mu(\,du)$.

3) por el inciso 1), se observa que la función $h(\omega) = \int |v|\mu_\omega(\,dv)$ está en $L_1(P)$, luego se considera la función $f(\omega, u) = \int |v - u|\mu_\omega(\,dv) \leq |u| + h(\omega)$, es decir, f no crece mas rápido que $|u|$ en ∞, por 2) se tiene que $E(\int |v - x_n(\omega)|\mu_\omega(\,dv)) = \lim_{m,\mathscr{U}} \|x_m - x_n\|_1$. Así $\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{U}} \|x_n - x_m\|_1 = \lim_{n,\mathscr{U}} E(\int |v - x_n(\omega)|\mu_\omega(\,dv)) = E(\int |v - u|\mu_\omega(\,dv)\mu_\omega(\,du))$.

4), es exactamente el inciso 2) del Teorema 17, consiste en aplicar directamente la definición de ω-convergencia en $L_1(P)$, mediante integrales de productos con funciones en $L_\infty(P)$. ■

Por simplicidad el teorema anterior se enunció solo para sucesiones ω-convergentes definidas en un subespacio cerrado y reflexivo, pudiéndose dar para sucesiones uniformemente integrables definidas en un subespacio cerrado, usando $x = \omega - \lim_{\mathscr{U}} x_n$ y $\mu = (\mu_\omega)_{\omega\in\Omega} = \omega^* - \lim_{\mathscr{U}} \mu_n$ donde $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no sea principal, en dichas condiciones todo vale igual, sin embargo para el objetivo principal del presente trabajo, el resultado anterior es más conveniente.

En las siguientes observaciones se supone trabajando en un subespacio cerrado, reflexivo y separable de $L_1(P)$.

Se observa que si (x_n) es una sucesión en $L_1(\Omega)$ y todas las x_n son de valor real, entonces la probabilidad aleatoria $\mu = (\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ cumple con que los soportes de μ_ω están en $\mathbb{R}$ P-c.s., para dar prueba de ello, se considera $f \in L_1(\Omega, \sigma, P, C(\mathbb{C}))$ de tal modo que $f \geq 0$ y $f(\omega, r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces se tiene que $E(\int f\mu_\omega(\,du)) = \lim_{\mathscr{U}} E(f(\omega, x_n(\omega))) = 0$, de donde $h(\omega) = \int f(\omega, u)\mu_\omega(\,du) = 0$ P-c.s., al ser $f \geq 0$ cualquiera, se concluye que $supp(\mu_\omega) \subset \mathbb{R}$ P-c.s.

Más aún, la observación del párrafo anterior se generaliza de forma análoga para cualquier subconjunto cerrado C de $\mathbb{C}$ del modo siguiente, si x_n adopta valores únicamente en C, entonces $supp(\mu_\omega) \subset C$ P-c.s.

Si hay dos funciones X y Y medibles en Ω de valor real y $x_n(\omega) \in [X(\omega), Y(\omega)]$ P-c.s. para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $supp(\mu_\omega) \subset [X(\omega), Y(\omega)]$ P-c.s., para demostrarlo se considera $f(\omega, u) = 1 \wedge dist(u, [X(\omega), Y(\omega)])$, se observa que $f(\omega, u) > 0$ si $u \notin [X(\omega), Y(\omega)]$ y $f(\omega, u) = 0$ si $u \in [X(\omega), Y(\omega)]$, como $x_n(\omega) \in [X(\omega), Y(\omega)]$ P-c.s., se sigue que $E(\int f \mu(\,\mathrm{d}u)) = \lim_{\mathscr{U}} E(f(\omega, x_n(\omega))) = 0$, de donde $\int f(\omega, u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u) = 0$ P-c.s., así $supp(\mu_\omega) \subset [X(\omega), Y(\omega)]$ P-c.s.

Capítulo 3

Teoría de Punto Fijo

En el presente capítulo se motiva la teoría de punto fijo así como algunos resultados elementales de la misma, finalmente se dan teoremas que relacionan la teoría presentada en los capítulos anteriores con la teoría de punto fijo.

3.1. Conceptos básicos

La teoría de punto fijo surge de aplicaciones de la matemática, en especial en las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, también hay modelos en la teoría de juegos, biología matemática, combinatoria e ingeniería, por mencionar algunos, que utilizan la teoría de punto fijo, ver [6, 10, 13, 27, 53, 57, 60].

Cuando se plantea el problema general $Tx = x$, la manera habitual de proceder es preguntarse si tiene solución, en caso afirmativo se pueden plantear las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo aproximar dicha solución?

2) ¿Cómo encontrar una solución explícita?

3) ¿Cuantas soluciones hay?

4) ¿Qué estructura tiene el conjunto de soluciones?

En el presente trabajo se ocupará de un teorema de existencia y parte de la pregunta del inciso 4).

***Definición* 15** (Punto fijo)**.** *Dada una función $T : C \to C$, se dirá que $x \in C$ es un punto fijo de T si $Tx = x$*

En adelante, se considerará T un operador definido de un conjunto C en si mismo.

Se define el *conjunto $Fix(T)$ de puntos fijos de T* mediante $Fix(T) = \{x \in C \,|\, Tx = x\}$.

No siempre hay puntos fijo, por ejemplo toda traslación no nula en $\mathbb{R}^2$ no tiene puntos fijos.

Ya que en general $Fix(T)$ puede ser vacío, se busca dar condiciones sobre T y C de tal modo que $Fix(T)$ no sea vacío.

La experiencia ha probado que es más efectivo trabajar con familias de operadores τ de un conjunto C en si mismo, con la finalidad de obtener resultados de la forma

$$T \in \tau \Rightarrow Fix(T) \neq \emptyset.$$

Luego la estructura general de un resultado de punto fijo es la siguiente:

Si C es un conjunto con estructura $\mathbb{A}$ y τ es una familia de operadores $T : C \to C$ que satisfacen $\mathbb{B}$, entonces $Fix(T) \neq \emptyset$ para todo $T \in \tau$.

Ahora se presentarán resultados clásicos los cuales aseguran la existencia de puntos fijos, no se darán las demostraciones de tales resultados, pero se mencionan para mostrar el contexto de la teoría y parte de su desarrollo.

Una herramienta útil suele ser estudiar las iteradas T^n del operador T, con $n \in \mathbb{N}$, si T es biyectivo se pueden definir las iteradas para $n \in \mathbb{Z}$. Se dirá que $x \in C$ es un *punto periódico* para T si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $T^p x = x$, es decir, x es un punto fijo para T^p, al mínimo de tales p se le llama el periodo de x y en tal caso se dice que x es un punto p-periódico o de periodo p.

***Proposición* 26.** *Si x es el único punto p-periódico para $T : C \to C$, entonces $x \in Fix(T)$.*

Si se supone más estructura en el dominio del operador, entonces se puede trabajar con los límites de las iteradas del operador del modo siguiente.

***Proposición* 27.** *Si C es un espacio topológico Hausdorff, $T : C \to C$ es continua y existe $x \in C$ tal que $\lim_n T^n x = z \in C$, entonces $z \in Fix(T)$.*

Como se ha visto, dar condiciones sobre el operador o dominio de definición del operador, pueden garantizar la existencia de puntos fijos, motivo de la siguiente definición.

***Definición* 16** (Función Lipschitz)**.** *Si $(C, d\,)$ es un espacio métrico y $T : C \to C$, se dirá que T es una función de Lipschitz si existe $\lambda \geq 0$ tal que $d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$ a la mínima de dichas λ se le llamará constante de Lipschitz, en cuyo caso T es llamada λ-Lipschitz.*

Una función λ-Lipschitz con $\lambda < 1$ se dice que es una *contracción.*

El problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales está dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Con f continuamente diferenciable. Cauchy utilizó el concepto de función Lipschitziana para resolver dar condiciones de solución del problema anterior.

El siguiente es un conocido resultado, el cual fue motivado por el problema de Cauchy y que garantiza la existencia y unicidad de soluciones del mismo bajo hipótesis adicionales.

***Teorema* 18** (Teorema de contracción de Banach)**.** *Si X es un espacio métrico completo y T es una contracción en X, entonces T tiene un único punto fijo x_0 dado por $x_0 = \lim\limits_n T^n x$ para cualquier $x \in X$.*

Las sucesiones $(T^n x)$ mencionadas en el teorema anterior, son llamadas iteradas de Piccard y fueron utilizadas por primera vez por Cauchy.

Banach generalizó a espacios métricos los conceptos presentados en los párrafos precedentes y con ellos dio solución a algunas ecuaciones integrales.

Es natural preguntarse si el Teorema de contracción de Banach se puede generalizar de forma natural, la respuesta es negativa, ya que si el espacio no es completo entonces se puede considerar el conjunto $B = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ y $T : B \to B$ dada por $T\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}$. De igual modo si T no es contracción, entonces cualquier $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $Tx = x + y$ para algún $y \in \mathbb{R}^2$ con $y \neq 0$ fijo es una transformación sin puntos fijos.

Si se trabaja en el contexto de espacios de Banach, entonces el Teorema de contracción de Banach está dando condiciones sobre los operadores de tal modo que se asegura la existencia de un punto fijo, razón que motiva la siguiente definición, que aunque es un caso particular de función Lipschitz, recibe un nombre distintivo ya que es de vital importancia parar los propósitos del presente.

***Definición* 17** (Función no expansiva)**.** *Dado un espacio métrico* (C, d)*, se dirá que una función* $T : C \to C$ *es no expansiva si* $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ *para cada* $x, y \in C$*, en particular, si* C *es un subconjunto de un espacio de Banach se tiene que* $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ *para cada* $x, y \in C$*.*

Otro conocido resultado el cual está motivado por aplicaciones y cuya primera prueba utiliza técnicas elementales de la topología algebraica, es el Teorema de Brouwer, el cual se enuncia a continuación.

***Teorema* 19** (Brouwer)**.** *Toda función continua* $f : B_{\mathbb{R}^n} \to B_{\mathbb{R}^n}$ *tiene un punto fijo.*

El Teorema de Brouwer es equivalente a diversos resultados, algunos de Teoría Económica y de Teoría de Juegos como son el Teorema de Poincaré y el Teorema de Bohl.

El siguiente resultado además de ser una técnica, como consecuencia brinda una forma equivalente al Teorema de Brouwer.

***Proposición* 28.** *Sean* A *y* X *dos conjuntos,* $T : A \to A$ *y* $f : X \to X$ *transformaciones, entonces* T *tiene un punto fijo si* f *tiene uno y existe* $\phi : X \to A$ *biyectiva tal que* $T = \phi f \phi^{-1}$*.*

Como consecuencia se tiene la forma equivalente al Teorema de Brouwer.

***Corolario* 8.** *Si* $C \subset \mathbb{R}^n$ *es convexo, cerrado y acotado, y* $f : C \to C$ *es continua, entonces* f *tiene un punto fijo.*

Es natural preguntarse si el Teorema de Brouwer se puede extender a espacios de dimensión infinita, en particular espacios de Banach, la respuesta a dicha pregunta es negativa, ya que el Teorema de Brouwer está fuertemente conectado con la unicidad de la topología finito dimensional y la compacidad de la bola.

La generalización del Teorema de Brouwer es el Teorema de Schauder el cual se enuncia a continuación.

***Teorema* 20** (Schauder)**.** *Si* $C \subset X$ *convexo y compacto de un espacio de Banach* X *y* $T : C \to C$ *es una transformación continua, entonces* T *tiene un punto fijo.*

El Teorema de Schauder aunque garantiza la existencia de puntos fijos, es restrictivo ya que la bola unitaria en espacios infinito dimensionales no es compacta.

Un ejemplo de la necesidad de la compacidad en el Teorema de Schauder es el siguiente.

Sea $C = \{(x_n) \in \ell_1 \,|\, x_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1\}$, este es un subconjunto convexo, cerrado y acotado en ℓ_1,, se considera el operador desplazamiento a la derecha $T : C \to C$ dado por $T(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, \cdots)$, esta es una transformación lineal continua sin puntos fijos.

El conjunto C del ejemplo anterior es el análogo de la colección de vectores $x \in \mathbb{R}^2$ con $\|x\|_1 = 1$ y de tal modo que se encuentran en el primer cuadrante, y la transformación T es no expansiva.

Motivada por el Teorema de contracción de Banach y el Teorema de Schauder es que se tiene la definición que se presenta a continuación.

***Definición* 18** (Propiedad del punto fijo)**.** *Un subconjunto C cerrado, convexo y acotado de un espacio de Banach, se dirá que tiene la propiedad del punto fijo si todo operador no expansivo $T : C \to C$ tiene un punto fijo.*

La definición anterior también se puede extender a espacios de Banach del modo siguiente.

***Definición* 19** (Propiedad del punto fijo)**.** *Un espacio de Banach tiene la propiedad del punto fijo (FPP)(Fixed Point Property) si todo subconjunto cerrado, convexo y acotado C de X tiene la propiedad del punto fijo.*

Como se mostró en un ejemplo previo, ℓ_1 no tiene la FPP, luego surge la pregunta si se puede debilitar la FPP de tal modo que bajo dicha definición ℓ_1 si cumpla dicha propiedad, esto mismo se podría preguntar para otros espacios que no cumplen la FPP, esta es la razón de las siguientes definiciones.

***Definición* 20** (τ-Propiedad del punto fijo)**.** *Si τ es una topología para un espacio de Banach X, un subconjunto C convexo y τ-compacto de X se dirá que tiene la τ-propiedad del punto fijo si todo operador no expansivo $T : C \to C$ tiene un punto fijo.*

Un espacio de Banach X se dirá que tiene la τ-propiedad del punto fijo (τ-FPP) si todo subconjunto C convexo y τ-compacto de X tiene la τ-propiedad del punto fijo.

En la definición anterior, cuando τ es la topología débil, se le llama la propiedad débil del punto y se escribe ω-FPP, lo mismo para alguna topología débil* en cuyo caso se llama ω^*-FPP.

Es importante notar que al considerar una topología débil* es porque ya se está fijando un predual de ante mano, esto se debe a que al cambiar de predual la topología débil* puede cambiar y por lo tanto cumplirse o no la ω^*-FPP, como ejemplo se tiene ℓ_1 con los preduales c la colección de sucesiones convergentes y c_0 el conjunto de sucesiones convergentes a 0, luego si se considera ℓ_1 dotado de la topología $\sigma(\ell_1, c)$ no tiene la ω^*-FPP, mientras que con $\sigma(\ell, c_0)$ si, la demostración se puede encontrar en [39].

Cuando un espacio de Banach es reflexivo, entonces por el Teorema de Mazur todo subconjunto cerrado y acotado es ω-cerrado y por lo tanto es ω^*-cerrado, luego por el Teorema de Alaoglu, es ω^*-compacto, de donde es ω-compacto, por el contrario, todo ω-compacto es cerrado y acotado, luego para espacios reflexivos la FPP y la ω-FPP son equivalentes.

Se puede preguntar si hay espacios sin la FPP que si cumplen la ω-FPP, un ejemplo de dichos espacios es ℓ_1, de hecho durante 20 años estuvo abierta la pregunta de si todo espacio de Banach tiene la ω-FPP, fue Alspach quien en 1981 mostró en [2] el primer ejemplo de un espacio de Banach sin la ω-FPP, a continuación se presentará dicho ejemplo.

Se considera el espacio $L_1[0,1]$ y el subconjunto $K = \{f \in L_1[0,1] \mid \int_0^1 f = 1,\ 0 \leq f \leq 2\}$, donde las desigualdades son c.s., dicho conjunto es convexo y ω-compacto, luego se define $T : K \to K$ dada por:

$$(Tf)(t) = \begin{cases} \text{mín}\{2f(2t), 2\} & , \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \text{máx}\{2f(2t-1) - 2, 0\} & , \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dicha transformación es no expansiva y no tiene puntos fijos, para mayor información se puede consultar [2].

La función presentada en el ejemplo anterior es conocida como la Función del Panadero (The Baker's Function) y de ésta se sigue que no se puede sustituir compacidad por ω-compacidad en el Teorema de Schauder.

3.2. Resultados clásicos

El objetivo de la presente sección es dar una serie de resultados concernientes a la teoría clásica de punto fijo.

Dado un conjunto C, una transformación $T : C \to C$ y $K \subset C$, se dirá que K es T-*invariante* si $TK \subset K$.

Sea X un espacio de Banach, $C \subset X$ convexo y ω-compacto, y $T : C \to C$ no expansiva, entonces se define $\mathfrak{F}_C = \{K \subset C \mid K \text{ es convexo, cerrado, acotado y } T\text{-invariante}\}$, se observa lo siguiente:

La familia $\mathfrak{F}_C \neq \emptyset$, ya que $C \in \mathfrak{F}_C$. Si $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una cadena en $\mathfrak{F}_C$ ordenada por la contención, entonces $K = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} K_\alpha$ es cerrado, acotado y no vacío ya que los K_α son ω-compactos cuya intersección finita es no vacía.

El conjunto K del párrafo anterior es T-invariante, para dar prueba de ello, sea $x \in K$, luego $x \in K_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$, de donde $Tx \in K_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$, así $Tx \in \Gamma$ y en consecuencia K es T-invariante y $K \in \mathfrak{F}_C$.

Por el Lema de Zorn existen conjuntos minimales, convexos, cerrados, ω-compactos, no vacíos T-invariantes.

Lo presentado se resume en la siguiente proposición.

***Proposición* 29.** *Sea X un espacio de Banach, $C \subset X$ convexo y ω-compacto, y $T : C \to C$ no expansivo, entonces existe $K \subset C$ mínimal, convexo, cerrado, acotado y T-invariante.*

Un conjunto K convexo, cerrado y acotado, que es T-invariante y minimal será llamado T-*minimal*.

La proposición anterior asegura la existencia de conjuntos T-minimales para T no expansivo definido en un convexo y ω-compacto en un espacio de Banach.

Si no se considera ω-compacidad, entonces los conjuntos T-minimales pueden ser vacíos, es decir, los conjuntos T-minimales en general tiene sentido estudiarlos cuando se está considerando la ω-FPP o se está trabajando la FPP en espacios reflexivos.

Si un operador T tiene puntos fijos, entonces hay conjuntos minimales singulares, razón por la cual es de interés estudiar propiedades de los conjuntos T-minimales.

***Proposición* 30.** *Sea X un espacio de Banach, $C \subset X$ convexo y ω-compacto, T no expansivo de C en C y K un conjunto T-minimal, entonces $\overline{conv}(TK) = K$*

Demostración: Sea $K_0 = \overline{conv}(TK)$, entonces K_0 es convexo, cerrado y no vacío ya que $K \neq \emptyset$.

El conjunto K_0 es T-invariante, para ello se observa que $TK \subset K$ de donde $K_0 = \overline{conv}(TK) \subset \overline{conv}(K) = K$, por lo tanto $TK_0 \subset TK \subset \overline{conv}(TK) = K_0$.

Así, de la minimalidad de K se sigue que $K = K_0$. ■

El siguiente resultado es una técnica que se empleará en demostraciones subsecuentes, con consecuencias relacionadas a propiedades geométricas de los conjuntos T-minimales.

***Proposición* 31.** *Sea X un espacio de Banach, K un conjunto T-minimal para un operador no expansivo definido de un conjunto $C \subset X$ cerrado y ω-compacto en si mismo, $\alpha : K \to \mathbb{R}^+$ convexa y semicontinua inferiormente, entonces si $\alpha(Tx) \leq \alpha(x)$ para todo $x \in K$ se tiene que α es constante.*

Demostración: Sean $x_0 \in K$ y $K_0 = \{x \in K \mid \alpha(x) \leq \alpha(x_0)\} = \alpha^{-1}(-\infty, \alpha(x_0)]$.

Ya que $x_0 \in K_0$, entonces $K_0 \neq \emptyset$. El conjunto K_0 es convexo por la convexidad de α, esto es, dado $x, y \in K_0$ y $\lambda \in (0,1)$ se tiene que $\alpha(\lambda x + (1+\lambda)y) \leq \lambda\alpha(x) + (1-\lambda)\alpha(y)$ $\leq \lambda\alpha(x_0) + (1-\lambda)\alpha(x_0) = \alpha(x_0)$. También K_0 es cerrado por la semicontinuidad inferior de α.

Se probará que K_0 es T-invariante, para ello se considera $y \in K_0$, entonces $\alpha(Ty) \leq \alpha(y) \leq \alpha(x_0)$ de donde $Ty \in K_0$, así $TK_0 \subset K_0$.

Así por la minimalidad de K se tiene que $K_0 = K$, de donde $\alpha(x) \leq \alpha(x_0)$ y como x_0 era cualquiera, se concluye que α es constante. ■

Dado que en dimensión finita se cuenta con el Teorema de Brouwer, los conjuntos T-minimales no triviales solo se pueden dar en dimensión infinita, razón por la cual no es de extrañarse que su estructura geométrica en primera instancia sea poco intuitiva.

***Teorema* 21.** *Sea X un espacio de Banach, $C \subset X$ convexo y ω-compacto, T no expansivo de C en C y K un conjunto T-minimal, entonces K es diametral, es decir,* $\sup_{y \in k} \|x - y\| = diam(K)$ *para todo $x \in K$.*

Demostración: Dado $x \in K$ fijo, se define $\alpha(x) = \sup_{y \in K} \|x - y\|$, se afirma que α es continua y convexa, para ello se observa que $|\alpha(x) - \alpha(z)| = |\sup_{y \in K} \|x - y\| - \sup_{y \in K} \|z - y\||$ $\leq \sup_{y \in K} |\|x - y\| - \|y - z\|| \leq \|x - z\|$ y para $\lambda \in (0, 1)$ se tiene $\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)z)$ $= \sup_{y \in K} \|\lambda x + (1 - \lambda)z + \lambda y + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda \sup_{y \in K} \|x - y\| + (1 - \lambda) \sup_{y \in K} \|z - y\| =$ $\lambda\alpha(x) + (1 - \lambda)\alpha(z)$.

Se observa que $K \subset \overline{B}(x, \alpha(x)) = \{z \in K \mid \|x - y\| \leq \alpha(x)\}$, entonces como T es no expansivo, se tiene que $\|Tx - Tz\| \leq \|x - z\| \leq \alpha(x)$ para todo $z \in K$, de donde $TK \subset B = \overline{B}(Tx, \alpha(x))$, luego por ser B cerrado y convexo, de la Proposición 30 se sigue $K \subset \overline{conv}(TK) \subset B$, por lo tanto $\alpha(Tx) \leq \alpha(x)$, al ser $x \in K$ cualquiera, se tiene que α satisface las hipótesis de la Proposición 31, luego α es constante en K, es decir, K es diametral. ■

En ejemplos anteriores ya se ha mostrado que no siempre hay puntos fijos, razón que motiva la siguiente definición.

***Definición* 21** (Sucesión de puntos fijos aproximados)**.** *Dado un espacio de Banach X y un operador T definido de un subconjunto C de X en si mismo, una sucesión (x_n) en C se dirá que es una sucesión de puntos fijos aproximados o puntos casi fijos para T (a.f.p.s.)(approximate fixed point sequence) si* $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$.

Si se encuentra una a.f.p.s. en un compacto, entonces se le puede extraer una subsucesión convergente y el punto de convergencia debe de ser un punto fijo.

Es natural buscar condiciones para asegurar la existencia de a.f.p.s., la respuesta la da la siguiente proposición.

***Proposición* 32.** *Sea X un espacio de Banach, $C \subset X$ cerrado, convexo y acotado, y T no expansivo definido de C en C, entonces existe una a.f.p.s. para T en C.*

Demostración: Sean $z \in K$ fijo y $0 < \epsilon < 1$, se considera la transformación $T_\epsilon : K \to K$ dada mediante $T_\epsilon x = \epsilon z + (1 - \epsilon)Tx$.

Se afirma que T_ϵ es una contracción, para ello $\|T_\epsilon x - T_\epsilon y\| = \|\epsilon z + (1 - \epsilon)Tx -$

$\epsilon z - (1-\epsilon)Ty\| \leq (1-\epsilon)\|Tx - Ty\| \leq (1-\epsilon)\|x-y\|$, luego por el Teorema de contracción de Banach, existe x_ϵ punto fijo para T_ϵ.

Se observa que $\|x_\epsilon - Tx_\epsilon\| = \|T_\epsilon x_\epsilon - Tx_\epsilon\| = \|\epsilon z + (1-\epsilon)Tx_\epsilon - Tx_\epsilon\| = \epsilon\|z - Tx_\epsilon\| \leq \epsilon\, diam(C)$, al ser ϵ cualquiera se concluye $\inf\{\|x - Tx\| \,|\, x \in K\} = 0$, es decir, existe una a.f.p.s. ■

El siguiente resultado muestra como se relaciona la estructura geométrica de los conjuntos T-minimales y las a.f.p.s., la demostración que se presenta es distinta de la original ya que utiliza ultrafiltros.

***Teorema* 22** (Göebel-Karlovitz)**.** *Sea X un espacio de Banach, T un operador no expansivo definido de $C \subset X$ convexo y ω-compacto en si mismo, K un conjunto T-minimal y (x_n) una a.f.p.s. para T en K, entonces se tiene que $\lim_n \|x_n - x\| = diam(K)$ para todo $x \in K$.*

Demostración: Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, para cada $x \in K$ se define $\alpha(x) = \lim_{\mathscr{U}} \|x_n - x\|$, dicha función está bien definida ya que para cada $x \in K$ la sucesión $(\|x_n - x\|)$ está acotada.

La función α es continua y convexa, para probar la continuidad, se observa que $|\alpha(x) - \alpha(y)| = |\lim_{\mathscr{U}} \|x_n - x\| - \lim_{\mathscr{U}} \|x_n - y\|| = \lim_{\mathscr{U}} |\|x_n - x\| - \|x_n - y\|| \leq \lim_{\mathscr{U}} \|x - y\| = \|x - y\|$, la convexidad de α se sigue de $\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lim_{\mathscr{U}} \|\lambda x_n - \lambda x + (1-\lambda)x_n - (1-\lambda)y\| \leq \lambda \lim_{\mathscr{U}} \|x_n - x\| + (1-\lambda)\lim_{\mathscr{U}} \|x_n - y\| = \lambda\alpha(x) + (1-\lambda)\alpha(y)$ para $\lambda \in (0,1)$.

Para cada $x \in K$ se tiene que $\alpha(Tx) \leq \alpha(x)$, esto se sigue de $\lim_{\mathscr{U}} \|x_n - Tx_n\| = \lim_n \|x_n - Tx_n\| = 0$ y $\alpha(Tx) = \lim_{\mathscr{U}} \|x_n - Tx\| = \lim_{\mathscr{U}} \|x_n - Tx_n + Tx_n - Tx\| \leq \lim_{\mathscr{U}} \|x_n - Tx_n\| + \lim_{\mathscr{U}} \|Tx_n - Tx\| \leq \lim_{\mathscr{U}} \|x_n - x\| = \alpha(x)$.

Ya que α satisface las hipótesis de la Proposición 31, entonces α es constante en K, llámese $c = \alpha(x)$ para todo $x \in K$.

Como K es cerrado y convexo, entonces por el Teorema de Mazur es ω-cerrado y dado que es un subconjunto de C, se sigue que es ω-compacto, luego $z = \omega - \lim_{\mathscr{U}} x_n$ existe.

Se observa que dado $r > 0$ se tiene que $\{x \in K \,|\, \|x\| \leq r\} = \{x \in X \,|\, \|x\| \leq r\} \cap K$

y dado que por el Teorema de Mazur $\{x \in K \,|\, \|x\| \leq r\}$ es ω-cerrado, entonces $\{x \in K \,|\, \|x\| \leq r\}$ es ω-cerrado, de donde $\|\cdot\|$ es ω-semicontinua inferiormente en K, luego para cada $x \in K$ se tiene $\|z - x\| = \|\lim_{\mathscr{U}} (x_n - x)\| \leq \lim_{\mathscr{U}} \|x_n - x\| = c$, de donde $\sup_{x \in K} \|z - x\| \leq c$, luego del Teorema 21 se sigue $c \geq diam(K)$ y como $\|x_n - x\| \leq diam(K)$ para cada $x \in K$, entonces $c = \lim_{\mathscr{U}} \|x_n - x\| \leq diam(K)$, es decir $c = diam(K)$ para cada $x \in K$.

Como $\mathscr{U}$ era cualquier ultrafiltro que no es principal en $\mathbb{N}$ y $\lim_{\mathscr{U}} \|x_n - x\| = diam(K)$, entonces se sigue que $(\|x_n - x\|)$ es una sucesión con un único punto de acumulación $diam(K)$ y $\lim_{n} \|x_n - x\| = diam(K)$ para cada $x \in K$. ■

Los siguientes resultados muestran que los dominios de definición para los operadores no expansivos, se pueden considerar conteniendo a un elemento en particular, con un diámetro en particular y ser conjuntos separables.

***Proposición* 33.** *Sea X un espacio de Banach, $C \subset X$, convexo, cerrado y acotado no trivial, y T no expansivo de C en C, entonces:*

1) *Dado $x_0 \in X$, existe un subconjunto C' convexo, cerrado y acotado de X con $x_0 \in C'$ y un operador no expansivo T' de C' en si mismo, tal que T' tiene un punto fijo si y solo si T tiene un punto fijo*

2) *Para cada $r > 0$, existe un subconjunto C' convexo, cerrado con $diam(C') = r$ de X y T' de C' en C' tal que T' tiene un punto fijo si y solo si T tiene un punto fijo*

3) *Existe un subconjunto C' cerrado, convexo, acotado y separable de X que es T-invariante.*

Demostración: Para demostrar 1) se consideran $c_0 \in C$ fijo y el conjunto $C' = \{x - c_0 + x_0 \,|\, x \in C\}$, K' es convexo, cerrado y acotado, para dar prueba de ello se observa que el operador $F : C \to C'$ dado por $Fx = x - c_0 + x_0$ es una isometría ya que $\|Fx - Fy\| = \|x - c_0 + x_0 - y + c_0 - x_0\| = \|x - y\|$ y es sobreyectiva por definición, luego C' es cerrado y acotado, la convexidad se sigue de la convexidad de C y $\lambda Fx + (1 - \lambda)Fy = \lambda x + (1 - \lambda) - c_0 + x_0$.

Luego se considera el operador $T' : C' \to C'$ dado mediante $T'(x - c_0 + x_0) = Tx - c_0 + x_0$, por la Proposición 28 basta probar que T' es no expansivo y esto se tiene ya que $\|FTx - FTy\| = \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$.

La demostración de 2) es análoga a la de 1), solo que en lugar de una traslación, se considera una homotecia.

Para demostrar 3) se considera $x_0 \in C$ fijo y se definen inductivamente las sucesión de conjuntos (K_n) y (X_n) del modo siguiente, $K_0 = \{x_0\}$, $X_0 = span(x_0)$, se suponen construidos K_j con $j < k$, entonces se construye $K_k = \overline{conv}(TK_{k-1} \cup K_{k-1})$ y $X_k = span(K_k) = span(X_k)$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $K_n \subset K$ y $K_n \subset K_{n+1}$ luego $X_n \subset X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se llaman $K_\infty = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n}$ y $X_\infty = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n}$, se observa que $K_\infty \subset X_\infty$.

Se observa que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto K_n es separable, para $n = 0$ es claro, para $n = 1$ basta considerar combinaciones convexas de valores en $\mathbb{Q}$, se supone K_k es separable, luego dado que T es continua, entonces TK_k es separable y $TK_k \cup K_k$ es separable con un subconjunto denso numerable A, luego se afirma que $B = \{\sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n \,|\, x_n \in A, \sum_{n=1}^{m} \lambda_n = 1, \lambda_n \geq 0, \lambda_n \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{N}\}$ es denso en K_{n+1}, para ello basta aproximar los elementos de $conv(TK_k \cup K_k)$ por los de B.

Dado $\epsilon > 0$ y $y = \sum_{n=1}^{m} \gamma_n y_n \in TK_k \cup K_k$, se toma $x = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n \in B$ tal que si $s = max\{\|y_n\| : 1 \leq n \leq m\}$, entonces $|\gamma_n - \lambda_n| < \dfrac{\epsilon}{2sm}$ y $\|y_n - x_n\| < \dfrac{\epsilon}{2m}$ para cada $0 \leq n \leq m$, entonces $\|y - x\| = \|\sum_{n=1}^{m} \gamma_n y_n - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n\| \leq \sum_{n=1}^{m} \|\gamma_n y_n - \lambda_n x_n\|$ $= \sum_{n=1}^{m} \|\gamma_n y_n - \lambda_n y_n + \lambda_n y_n - \lambda_n x_n\| \leq \sum_{n=1}^{m} |\gamma_n - \lambda_n| \|y_n\| + \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n| \|y_n - x_n\| < \epsilon$, así K_{k+1} es separable y en consecuencia K_n es separable para todo $n \in \mathbb{N}$.

De forma análoga a como se probó que K_n es separable, se demuestra que X_n es separable, con la ligera diferencia de que se toman combinaciones lineales con escalares en $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ según sea el campo de escalares $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Así $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ es separable, de donde X_∞ lo es y en consecuencia K_∞ es separable.

Se afirma que K_∞ es convexo, cerrado y acotado, el ser cerrado es por definición, la convexidad se sigue de que dados $x, y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ entonces al ser (K_n) una sucesión creciente de convexos, existe K_{n_0} tal que $x, y \in K_{n_0}$ de donde $\lambda x + (1-\lambda)y \in K_{n_0} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, luego ya que la cerradura de un convexo es convexo, se tiene que K_∞ es convexo, además ya que $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \subset K$ y K es un convexo cerrado, entonces $K_\infty \subset K$ de donde es acotado.

Solo resta probar que K_∞ es T-invariante, por la continuidad de T, basta probar que $T(\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n) \subset K_\infty$, entonces dado $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, existe K_{n_0} tal que $x \in K_{n_0}$, luego por construcción, $Tx \in K_{n_0+1} \subset K_\infty$. ■

El siguiente resultado permitirá considerar solo espacios separables al estudiar los conjuntos T-minimales.

***Corolario* 9.** *Sea X un espacio de Banach, C un subconjunto de X convexo y ω-compacto, T un operador no expansivo de C en C, y K un conjunto T-minimal, entonces K es separable.*

Demostración: Por el inciso 3) de la Proposición 33, existe un subconjunto K' convexo, cerrado, acotado y separable de K que es T-invariante, entonces por la minimalidad de K se concluye que $K' = K$, luego K es separable. ■

Se dirá que un subconjunto C de un espacio métrico (X, d) es *métricamente convexo* si para cada $x, y \in C$ y $0 \geq \lambda \geq 1$ se tiene que existe $z \in C$ tal que $d(x, z) = \lambda d(x, y)$ y $d(y, z) = (1-\lambda)d(x, y)$.

La proposición que se presenta a continuación, brinda una forma simple de probar que un conjunto es convexo o métricamente convexo.

***Proposición* 34.** *Sea C un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X, entonces:*

1) C es métricamente convexo si y solo si para cada $x, y \in C$ existe $z \in C$ tal que $\|x - z\| = \frac{1}{2}\|x - y\| = \|y - z\|$

2) C es convexo si y solo si para cada $x, y \in C$ se tiene que $\frac{1}{2}(x + y) \in C$

Demostración: Inciso 1). Solo se demostrará el recíproco ya que la otra parte es directa de la definición.

Basta suponer $0 < \lambda < 1$, ya que si $\lambda = 1$ o 0, entonces z es x o y, luego λ tiene una expansión diádica de la forma $\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots$, donde $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{2^n}$ y $\lambda_n = 0$ o 1, y necesariamente $\lambda_0 = 0$.

Recursivamente se construye una sucesión (z_n) en C del modo siguiente, z_0 es tal que satisface

$$\|u_0 - z_0\| = \tfrac{1}{2}\|u_0 - v_0\| = \|v_0 - z\| \cdots (\triangle)$$

Para $u_0 = x$ y $v_0 = y$.

Se suponen escogidos z_j y construidos u_j y v_j con $j < k$, luego si $\lambda_k = 0$, entonces se definen $u_k = u_{k-1}$, $v_k = z_{k-1}$ y se escoge z_k tal que satisface $(\triangle)$ para u_k en lugar de u_0 y v_k en lugar de v_0, mientras que si $\lambda_k = 1$ entonces se definen $u_k = z_{k-1}$, $v_k = v_{k-1}$ y se toma z_k tal que satisface $(\triangle)$ con u_k por u_0 y v_k por v_0.

Se afirma que la sucesión (z_n) es de Cauchy, para ello se observa que $\|z_k - z_{k+1}\| = \frac{1}{2^k}\|x - y\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego $\|z_k - z_{k+j}\| = \|z_k - z_{k+1} + z_{k+1} - \cdots - z_{k+j}\| \leq \sum_{n=k}^{k+j-1} \|x - y\|$ y esto converge a 0 cuando $k \to \infty$.

Se toma $z = \lim_n z_n$ y se afirma que z satisface $\|x - z\| = \lambda\|x - y\|$ y $\|y - z\| = (1 - \lambda)\|x - y\|$, para ello basta observar que $\|x - z_k\| = \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda_n}{2^n}\|x - y\|$ y $\|y - z\| = (1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda_n}{2^n})\|x - y\|$ para cada $k \in \mathbb{N}$, así de la continuidad del producto en $\mathbb{R}$ y la norma en X se concluye $\|x - z\| = \lambda\|x - y\|$ y $\|y - z\| = (1 - \lambda)\|x - y\|$.

La demostración de 2) es análoga a la de 1), solo que se consideran directamente combinaciones convexas. ■

3.3. Punto fijo y ultrapotencias

El objetivo de la presente sección es dar algunos resultados de punto fijo para las ultrapotencias de espacios de Banach.

Se considera un espacio de Banach X, $C \subset X$ convexo, ω-compacto, T no expansivo de C en C, K un conjunto T minimal y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces por la Proposición 16 el conjunto $(K)_{\mathscr{U}}$ es cerrado, convexo y acotado en $(X)_{\mathscr{U}}$.

El operador $(T)_{\mathscr{U}}$, por la Proposición 17, es no expansivo de $(K)_{\mathscr{U}}$ en si mismo.

Si además (x_n) es una a.f.p.s. para T en K, entonces $\widetilde{(x_n)} \in (X)_{\mathscr{U}}$ y $\|(T)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_n)} - \widetilde{(x_n)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|Tx_n - x_n\| = \lim\limits_{n} \|Tx_n - x_n\| = 0$, luego $(T)_{\mathscr{U}}\widetilde{(x_n)} = \widetilde{(x_n)}$, es decir, las clases de las a.f.p.s. son puntos fijos en la ultrapotencia, por lo tanto $Fix((T)_{\mathscr{U}}) \neq \emptyset$.

Dado que $(T)_{\mathscr{U}}$ tiene puntos fijos, entonces $(K)_{\mathscr{U}}$ no es minimal.

Por otra parte, si $\widetilde{(x_n)} \in Fix((T)_{\mathscr{U}})$, entonces dado que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|Tx_n - x_n\| = 0$, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que es una a.f.p.s.

Si $x \in K$ se identifica mediante el encaje natural con $\widetilde{(x)} \in (K)_{\mathscr{U}}$ y $\widetilde{(x_n)} \in (K)_{\mathscr{U}}$ con $\widetilde{(x_n)} \in Fix((T)_{\mathscr{U}})$, entonces dado que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_n - x\| = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|Tx_n - x\|$, se puede rehacer la prueba del Teorema 22 de Göebel-Karlovitz, considerando la función $\alpha(x)$ $= \lim\limits_{\mathscr{U}} \|Tx_n - x\|$ y concluir que la función α es constante y su valor es $diam(K)$, es decir, $\|\widetilde{(x_n)} - \widetilde{(x)}\|_{\mathscr{U}} = diam(K)$ para todo $x \in K$.

Los resultados presentados se resumen en la siguiente proposición.

***Proposición* 35.** *Sea X un espacio de Banach, C un cerrado y ω-compacto en X, T un operador no expansivo de C en si mismo, K un conjunto T-minimal y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces:*

1) *$(K)_{\mathscr{U}}$ es convexo, cerrado y acotado en $(X)_{\mathscr{U}}$*

2) *$(T)_{\mathscr{U}}$ es un operador no expansivo de $(K)_{\mathscr{U}}$ en si mismo*

3) *Si (x_n) es una a.f.p.s. para T en K, entonces $\widetilde{(x_n)}$ es un punto fijo para $(T)_{\mathscr{U}}$, es decir, $Fix((T)_{\mathscr{U}}) \neq \emptyset$*

4) *Si* $\widetilde{(y_n)} \in Fix((T)_{\mathscr{U}})$ *entonces existe* (y_{n_k}) *subsucesión de* (y_n) *que es a.f.p.s. para* T *en* K

5) *Si* $x \in K$ *se identifica con* $\widetilde{x} = \widetilde{(x)} \in (K)_{\mathscr{U}}$ *y* $\widetilde{y} \in Fix((T)_{\mathscr{U}})$*, entonces* $\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\|_{\mathscr{U}} = diam(K)$ *para todo* $x \in K$

Los incisos del 1) al 4) de la proposición anterior, muestran que al pasar a la ultrapotencia, se trasladan las propiedades estudiadas en la FPP o ω-FPP, se ganan puntos fijos al transformar las a.f.p.s. en puntos fijos y asegura extraer a.f.p.s. de los puntos fijos en la ultrapotencia.

El inciso 4) puede ser considerado una generalización del Teorema de Göebel-Karlovitz, además sugiere que hay una estructura diametral en la ultrapotencia de los conjuntos minimales, hecho que se demostrará mas adelante.

A continuación se presentan más propiedades de la ultrapotencia de un conjunto T-minimal y el conjunto de puntos fijos de la ultrapotencia de T, algunas de ellas son muy semejantes a las propiedades que tienen los conjuntos T-minimales.

***Proposición* 36.** *Sea* X *un espacio de Banach,* T *un operador no expansivo definido de* $C \subset X$*, convexo y* ω*-compacto en* C*,* K *un conjunto* T*-minimal y* $\mathscr{U}$ *un ultrafiltro en* $\mathbb{N}$ *que no es principal, entonces:*

1) $diam((K)_{\mathscr{U}}) = diam(K) = diam(Fix((T)_{\mathscr{U}}))$

2) *Los conjuntos* K*,* $(K)_{\mathscr{U}}$ *y* $Fix((T)_{\mathscr{U}})$ *son diametrales*

3) $Fix((T)_{\mathscr{U}})$ *es un conjunto métricamente convexo*

4) *Si* $(\widetilde{w}_n)$ *es una a.f.p.s. para* $(T)_{\mathscr{U}}$ *en* $(K)_{\mathscr{U}}$*, entonces para cada* $x \in K$ *se tiene que* $\lim_n \|\widetilde{w}_n - \widetilde{(x)}\|_{\mathscr{U}} = diam(K)$

Demostración: 1) El que $diam(K) = diam((K)_{\mathscr{U}})$ se sigue de la Proposición 16, se probará que $diam(Fix((T)_{\mathscr{U}})) = diam(K)$, para ello se considera (x_n) una a.f.p.s. en K, luego se construye inductivamente una subsucesión (x_{m_n}) de (x_n) del modo siguiente, se toma $0 < \epsilon < diam(K)$, entonces por el Teorema de Göebel-Karlovitz, Teorema 22, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_1 - x_{m_1}\| > diam(K) - \epsilon$, luego se suponen construidos $m_j \in \mathbb{N}$ con $j < k$, entonces por el Teorema de Göebel-Karlovitz se escoge $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $m_k > m_{k-1}$ y $\|x_k - x_{m-k}\| > diam(K) - \frac{\epsilon}{k}$.

Ya que (x_n) es una a.f.p.s., se tiene que (x_{m_n}) es una a.f.p.s. y por construcción

$\lim\limits_{n} \|x_n - x_{m_n}\| \geq diam(K)$ y como $\|x_n - x_{m_n}\| \leq diam(K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se concluye que $\|\widetilde{(x_n)} - \widetilde{(x_{m_n})}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_n - x_{m_n}\| = \lim\limits_{n} \|x_n - x_{m_n}\| = diam(K)$ y como $diam(Fix((T)_{\mathscr{U}})) \leq diam(K)$, se concluye $diam(Fix((T)_{\mathscr{U}})) = diam(K)$ $= diam((K)_{\mathscr{U}})$.

2) El que K sea diametral es el Teorema 21, para demostrar que $(K)_{\mathscr{U}}$ y $Fix((T)_{\mathscr{U}})$ son diametrales, mediante un argumento análogo al utilizado para demostrar 1), dado un elemento $\widetilde{(y_n)}$ en $(K)_{\mathscr{U}}$ o $Fix((T)_{\mathscr{U}})$ y una a.f.p.s. (x_n), se le puede extraer una subsucesión (x_{m_n}) a (x_n) tal que $\lim\limits_{n} \|y_n - x_{m_n}\| = diam(K)$, luego $\|\widetilde{(y_n)} - \widetilde{(x_{m_n})}\|_{\mathscr{U}} = diam(K)$.

3) Se supone que K no es trivial, ya que en caso de ser un singular, entonces $(K)_{\mathscr{U}}$ también lo es, de donde se obtiene la conclusión.

Ya que $(T)_{\mathscr{U}}$ es continuo, entonces es directo que $Fix((T)_{\mathscr{U}})$ es cerrado, luego por la Proposición 34, basta demostrar que para cualesquiera $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in Fix((T)_{\mathscr{U}})$, existe $\widetilde{z} \in Fix((T)_{\mathscr{U}})$ tal que $\|\widetilde{x} - \widetilde{z}\|_{\mathscr{U}} = \frac{1}{2}\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\|_{\mathscr{U}} = \|\widetilde{y} - \widetilde{z}\|_{\mathscr{U}}$.

Sean $\widetilde{(x_m)}, \widetilde{(y_m)} \in (K)_{\mathscr{U}}$ y $n \in \mathbb{N}$ fijo, entonces se definen, $\delta_n = \max\{\|x_n - Tx_n\|, \|y_n - Ty_n\|\}$, $\epsilon_n = \min\{\frac{1}{2}, \sqrt{\delta_n}\}$, $d_n = \frac{1}{2}\|x_n - y_n\|$ y $\eta_n = \dfrac{1-\epsilon_n}{\epsilon_n}\delta_n$.

Se considera $K_n = \{z \in K \mid \max\{\|x_n - z\|, \|y_n - z\|\} \leq d_n + \eta_n\}$.

Se afirma que K_n es no vacío, cerrado y convexo, el que sea no vacío se sigue de que $d_n = \|\frac{1}{2}(x_n - y_n)\| = \|\frac{1}{2}(y_n - x_n)\| = \|x_n - \frac{1}{2}(x_n + y_n)\| = \|y_n - \frac{1}{2}(x_n + y_n)\|$, luego $\frac{1}{2}(x_n + y_n) \in K_n$.

Para demostrar que K_n es cerrado, se considera (z_m) sucesión en K_n que converge a un $z \in K$, entonces por la continuidad de la norma se tiene que $\max\{\|x_n - z\|, \|y_n - z\|\} = \max\{\lim\limits_{m} \|x_n - z_m\|, \lim\limits_{m} \|y_n - z_m\|\}$, como $\|x_n - z_m\|, \|y_n - z_m\|$ $\leq \max\{\|x_n - z_m\|, \|y_n - z_m\|\}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{m} \|x_n - z_m\|, \lim\limits_{m} \|y_n - z_m\|$ $\leq \limsup \max\{\|x_n - z_m\|, \|y_n - z_m\|\} \leq d_n + \eta_n$, así $\max\{\|x_n - z\|, \|y_n - z\|\} \leq d_n + \eta_n$.

La convexidad de K_n se sigue de $\|x_n - \lambda z_1 - (1-\lambda)z_2\| \leq \lambda\|x_n - z_1\| + (1-\lambda)\|y_n - z_2\|$ y $\|y_n - \lambda z_1 - (1-\lambda)z_2\| \leq \lambda\|y_n - z_1\| + (1-\lambda)\|y_n - z_2\|$.

Para cada $z \in K$, se define $T_n z = (1-\epsilon_n)Tz + \epsilon_n \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, se observa que K_n es T_n-invariante, para ello se considera $z \in K_n$, entonces se observa que $x_n - Tz$ $= x_n - \epsilon_n x_n + \epsilon_n x_n - (1-\epsilon_n)Tz - \epsilon_n \frac{1}{2}(x_n + y_n) = (1-\epsilon_n)(x_n - Tz) + \epsilon_n \frac{1}{2}(x_n - y_n)$.

Por lo tanto $\|x_n - T_n z\| \leq (1-\epsilon_n)\|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - Tz\| + \epsilon_n \|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\|$ $\leq (1-\epsilon_n)\|x_n - Tx_n\| + \|x_n - z\| + \epsilon_n \|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\| \leq (1-\epsilon_n)(\delta_n + d_n) + \epsilon_n d_n$ $\leq (1-\epsilon_n)(\delta_n + d_n + \eta_n) + \epsilon_n d_n = d_n + (1-\epsilon_n)\delta_n + (1-\epsilon_n)\eta_n = d_n + \epsilon_n \eta_n + (1-\epsilon_n)\eta_n$ $d_n + \eta_n$.

De forma análoga se prueba que $\|x_n - T_n z\| \leq d_n + \eta_n$, por lo tanto K_n es T_n invariante.

Se afirma que T_n es una contracción estricta, esto porque $\|T_n z - T_n w\| = (1-\epsilon_n)\|Tz - Tw\| \leq (1-\epsilon_n)\|z - w\|$ ya que $\delta_n \neq 0$ por no ser trivial K, entonces T_n es una contracción estricta, luego por el Teorema de contracción de Banach, existe un único punto fijo z_n de T_n en K_n.

Por lo tanto $\|x_n - z_n\|, \|y_n - z_n\| \leq d_n + \eta_n$ y $\|z_n - Tz_n\| = \|T_n z_n - Tz_n\| = \epsilon_n \|Tz_n + \frac{1}{2}(x_n + y_n)\| \leq \epsilon_n diam(K)$.

Dado que $\widetilde{(x_n)}, \widetilde{(y_n)} \in Fix((T)_{\mathscr{U}})$, entonces $\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_n - Tx_n\| = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|y_n - Ty_n\| = 0$, luego dado $\epsilon > 0$, existen $I_1, I_2 \subset \mathbb{N}$ con $I_1, I_2 \in \mathscr{U}$ tales que $\|x_n - Tx_n\| < \epsilon$ si $n \in I_1$ y $\|y_n - Ty_n\| < \epsilon$ si $n \in I_2$, entonces $\|x_n - Tx_n\|, \|y_n - Ty_n\| < \epsilon$ si $n \in I = I_1 \cap I_2 \in \mathscr{U}$, de donde $\delta_n = \max\{\|x_n - Tx_n\|, \|y_n - Ty_n\|\} < \epsilon$ si $n \in I$, así $\lim\limits_{\mathscr{U}} \delta_n = \lim\limits_{\mathscr{U}_I} \delta_n < \epsilon$, es decir, $\lim\limits_{\mathscr{U}} \delta_n = 0$.

Dado que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \delta_n = 0$, entonces $\lim\limits_{\mathscr{U}} \epsilon_n = 0$, ya que dado $0 < \epsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$, existe $I \in \mathscr{U}$ tal que $\delta_n < \epsilon^2$ para todo $n \in I$, es decir, $\epsilon_n = \min\{\frac{1}{2}, \sqrt{\delta_n}\} \leq \sqrt{\delta_n} < \epsilon$ si $n \in I$, de donde $\lim\limits_{\mathscr{U}} \epsilon_n = \lim\limits_{\mathscr{U}_I} \sqrt{\delta_n} = 0$.

Se afirma que $\lim\limits_{\mathscr{U}} \eta_n = 0$, para ello se observa que dado $0 < \epsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$ existe $I \in \mathscr{U}$ tal que $\delta_n < \epsilon^2$, de donde $\epsilon_n = \min\{\frac{1}{2}, \sqrt{\delta_n}\} < \epsilon^2 < \frac{1}{2}$ para cada $n \in I$, de donde $\epsilon_n = \sqrt{\delta_n}$ para cada $n \in I$, luego $\lim\limits_{\mathscr{U}} \eta_n = \lim\limits_{\mathscr{U}_I} \dfrac{1-\sqrt{\delta_n}}{\sqrt{\delta_n}} \delta_n = 0$.

Luego $\|\widetilde{(x_n)} - \widetilde{(z_n)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_n - y_n\| \leq \lim\limits_{\mathscr{U}} (d_n + \eta_n)$ $\frac{1}{2}\lim\limits_{\mathscr{U}} \|x_n - y_n\| + \lim\limits_{\mathscr{U}} \eta_n$ $= \frac{1}{2}\|\widetilde{(x_n)} - \widetilde{(y_n)}\|_{\mathscr{U}}$, de forma análoga $\|\widetilde{(y_n)} - \widetilde{(z_n)}\|_{\mathscr{U}} \leq \frac{1}{2}\|\widetilde{(x_n)} - \widetilde{(y_n)}\|_{\mathscr{U}}$, luego por la desigualdad del triángulo para la norma en la ultrapotencia se tiene que $\|\widetilde{(x_n)} - \widetilde{(z_n)}\|_{\mathscr{U}}$

$= \frac{1}{2}\|\widetilde{(x_n)} - \widetilde{(y_n)}\|_{\mathscr{U}} = \|\widetilde{(y_n)} - \widetilde{(z_n)}\|_{\mathscr{U}}$.

Se obtiene que $\widetilde{(z_n)} \in Fix((T)_{\mathscr{U}})$ ya que $\|\widetilde{(z_n)} - (T)_{\mathscr{U}}\widetilde{(z_n)}\|_{\mathscr{U}} = \lim\limits_{\mathscr{U}} \|z_n - Tz_n\|$ $\leq \lim\limits_{\mathscr{U}} \epsilon_n diam(K) = 0$.

De hecho (z_n) es una a.f.p.s.

4) Sea $(\widetilde{w}_n)$ una a.f.p.s. para $(T)_{\mathscr{U}}$ en $(K)_{\mathscr{U}}$ y $x \in K$ identificado con $\widetilde{x} = \widetilde{(x)} \in (K)_{\mathscr{U}}$, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\|\widetilde{w}_n - \widetilde{x}\|_{\mathscr{U}} \leq diam((K)_{\mathscr{U}}) = diam(K)$, entonces para demostrar que $\lim\limits_n \|\widetilde{w}_n - \widetilde{x}\|_{\mathscr{U}} = diam(K)$, basta probar que $d = \liminf \|\widetilde{w}_n - \widetilde{x}\|_{\mathscr{U}}$ $= diam(K)$ y para ello basta probar que la subsucesión $(\widetilde{w}_{n_k})$ de $(\widetilde{w}_n)$ que converge a d, converge a $diam(K)$, entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\lim\limits_n \|\widetilde{\omega}_n - \widetilde{x}\|_{\mathscr{U}} = d$.

Se supone (ϵ_n) una sucesión de reales no negativos tal que $\epsilon_n \downarrow 0$ y se llaman $\widetilde{w_n} = \widetilde{(w_m^n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego dado que $\lim\limits_n \|\widetilde{w}_n - \widetilde{x}\|_{\mathscr{U}} = d$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $N_n \in \mathbb{N}$ tal que $\|\widetilde{w}_s - \widetilde{x}\|_{\mathscr{U}} < d + \epsilon_n$ si $s \geq N_n$, luego para todo $s \geq N_n$ se tiene que $\lim\limits_{m,\mathscr{U}} \|w_m^s - x\| < d + \epsilon_n$, por lo que para cada $s \geq N_n$, existe $I_n^s \in \mathscr{U}$ tal que $\|w_m^s - x\| < d + \epsilon_n$ si $m \in I_n^s$.

para cada $n \in \mathbb{N}$ se llama $\delta_n = \|\widetilde{w}_n - (T)_{\mathscr{U}}\widetilde{w}_n\|_{\mathscr{U}}$, entonces como $\lim\limits_n \|\widetilde{w}_n - (T)_{\mathscr{U}}\widetilde{w}_n\|_{\mathscr{U}}$ $= 0$, se tiene que $\delta_n \to 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{m,\mathscr{U}} \|w_m^s - Tw_m^s\|$ $= \|\widetilde{w}_s - (T)_{\mathscr{U}}\widetilde{w}_s\|_{\mathscr{U}} < \epsilon_n + \delta_n$ si $s \geq M_n$, así para cada $s \geq M_n$, existe $J_n^s \in \mathscr{U}$ tal que $\|w_m^s - Tw_m^s\| < \epsilon_n + \delta_n$ si $m \in J_n^s$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se llaman $S_n = \max\{N_n, M_n\}$ y dado $s \geq S_n$, $V_n^s = I_n^s \cap J_n^s$, entonces para cada $m \in V_n^s$ se tiene que $\|w_m^s - x\| < d + \epsilon_n$ y $\|w_m^s - Tw_m^s\| < \epsilon_n + \delta_n$, se construyen inductivamente sucesiones crecientes (m_k) y (n_k) en $\mathbb{N}$ del modo siguiente.

Para $k = 1$ se toma $m_1 = S_1$, se escoge $m \in V_1^{m_1}$ y se llama $n_1 = m$, se observa que $\|w_{m_1}^{n_1} - x\| < d + \epsilon_1$ y $\|w_{m_1}^{n_1} - Tw_{m_1}^{n_1}\| < \epsilon_1 + \delta_1$, se suponen escogidos m_j y n_j para $j < k$, entonces se considera $m_k = \max\{m_{k-1}, S_k\} + 1$, se escoge $m \in V_k^{m_k}$ con $m > n_{k-1}$, esto siempre se puede ya que $V_k^{m_k} \in \mathscr{U}$ y por lo tanto es infinito, se llama $n_k = m$, se observa que $\|w_{m_k}^{n_k} - x\| < d + \epsilon_k$ y $\|w_{m_k}^{n_k} - Tw_{m_k}^{n_k}\| < \epsilon_k + \delta_k$.

Ya que (ϵ_n) y (δ_n) convergen a 0, entonces $(w_{m_k}^{n_k})$ es una a.f.p.s., luego por el Teorema de Göebel-Karlovitz, Teorema 22, se tiene $\lim\limits_k \|w_{m_k}^{n_k} - x\| = diam(K)$, en consecuencia

$diam(K) \leq d$, así $\lim_n \|\widetilde{w}_n - \widetilde{x}\| = diam(K)$ para todo $x \in K$. ■

El inciso 4) de la proposición anterior es una versión del Teorema de Göebel-Karlovitz en el caso de ultrapotencias.

Una aplicación del inciso 4) del resultado anterior es presentada a continuación.

***Corolario* 10.** *Sea X un espacio de Banach, $C \subset X$ convexo y ω-compacto, T un operador no expansivo de C en C, K un conjunto T-minimal, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, $\widetilde{W} \subset (K)_{\mathscr{U}}$ un conjunto convexo, cerrado y $(T)_{\mathscr{U}}$-invariante, entonces $\sup\{\|\widetilde{w} - \widetilde{(x)}\| \mid \widetilde{w} \in \widetilde{W}\} = diam(K)$ para todo $x \in K$ con $\widetilde{(x)}$ la identificación natural de x en $(K)_{\mathscr{U}}$.*

Demostración: Dado que $\widetilde{W}$ es convexo, cerrado y $(T)_{\mathscr{U}}$-invariante, entonces existe una a.f.p.s. $(\widetilde{w}_n)$ para $(T)_{\mathscr{U}}$ en $\widetilde{W} \subset (K)_{\mathscr{U}}$, luego por el inciso 4) de la Proposición 36, para cada $x \in K$ se tiene que $\lim_n \|\widetilde{w}_n - \widetilde{(x)}\|_{\mathscr{U}} = diam(K)$, de donde $\sup\{\|\widetilde{w} - \widetilde{(x)}\| \mid \widetilde{w} \in \widetilde{W}\} = diam(K)$. ■

El siguiente resultado asegura poder manipular los dominios de definición de los operadores no expansivos en conjuntos minimales en $L_1(\mu)$ de tal modo que las funciones sean solo reales y garantiza la existencia de familias de elementos en $L_1(\mu)$ con soportes ajenos en una noción debilitada.

***Proposición* 37.** *Sea K un subconjunto convexo, ω-compacto y minimal de más de un punto en $L_1(\Omega)$, para un operador no expansivo T definido en un subconjutno convexo ω-compacto, el cual pertenece a un subespacio cerrado y reflexivo de $L_1(\Omega)$, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal, entonces se tiene:*

1) *Existe un $x_0 \in K$ y una función medible $G : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $|G(\omega)| = 1$ P-c.s. y que para cada $x \in K$ $(x - x_0)G$ es una función real*

Si adicionalmente se supone que K solo consta de funciones de valor real

2) *Dados D un conjunto de índices numerable y (x_n^α) una a.f.p.s. para cada $\alpha \in D$, entonces existen dos funciones U y V medibles en Ω tales que*

$$\lim_{n,\mathscr{U}} E(|x_n^\alpha - U| \wedge |x_n^\alpha - V|) = 0$$

para cada $\alpha \in D$

Demostración: Sea (x_n) una a.f.p.s. para T en K, ya que K es minimal, entonces por la Proposición 33 se puede suponer que es un subconjunto de un espacio cerrado, reflexivo y separable de $L_1(P)$.

Ya que K es ω-compacto, entonces $\omega - \lim_{\mathscr{U}} x_n = x_0 \in K$ existe, sin pérdida de generalidad pasando por una subsucesión, se puede suponer que $\omega - \lim_{n} x_n = x_0$, de igual modo, por la Proposición 33 se puede suponer que $x_0 = 0$ y $diam(K) = 1$, luego por el Teorema de Göebel-Karlovitz, Teorema 22, se tiene que $\lim_{n} \|x - x_n\| = diam(K) = 1$ para cada $x \in K$.

Sea $\mu = (\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ la medida aleatoria asociada a (x_n) cuya existencia se asegura en los Teoremas 16 y 17, entonces de la Proposición 25 se sigue que $E(\int|x - u|\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)) = \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n - x\| = 1$, en particular, cuando $x = 0$ se tiene $\lim_{\mathscr{U}} \|x_n\| = E(\int|u|\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)) = 1$.

Por el Teorema de Göebel-Karlovitz, Teorema 22, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lim_{m,\mathscr{U}} \|x_n - x_m\| = 1$, luego $\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{U}} \|x_n - x_m\| = 1$, entonces por la Proposición 25 $E(\int|v - u|)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}v)) = 1$.

Dado que (x_n) ω-converge a 0, de la Proposición 25 se sigue $\int u\mu_\omega(\,\mathrm{d}u) = 0$ P-c.s.

Luego se tiene que $\int|u - v|\mu_\omega(\,\mathrm{d}v) \geq |\int(u - v)\mu_\omega(\,\mathrm{d}v)| = |u|$ μ_ω-c.s.

Dado que $E(\int|u-v|\mu_\omega(\,\mathrm{d}v)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)) = E(\int|u|\mu_\omega(\,\mathrm{d}u))$ y las funciones $\int|u-v|\mu_\omega(\,\mathrm{d}v)$m $|u|$ son no negativas, se concluye que $\int|u - v|\mu_\omega(\,\mathrm{d}v) = |u|$ P-c.s., μ_ω-c.s., es decir, si se considera $\omega \in \Omega$ fuera de un conjunto de medida 0 y $u \in supp(\mu_\omega)$ entonces $|u| = \int|u - v|\mu_\omega(\,\mathrm{d}v)$.

Dado $\omega \in \Omega$ fijo y $u \in supp(\mu_\omega)$ fijo, se toma $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ y tal que $zu = |u|$, entonces $|u| = \int|u - v|\mu_\omega(\,\mathrm{d}v) = \int|zu - zv|\mu_\omega(\,\mathrm{d}v) \geq \int Re(zu - zv)\mu_\omega(\,\mathrm{d}v)$ $= \int Re(|u|)\mu_\omega(\,\mathrm{d}v) - z\int Re(v)\mu_\omega(\,\mathrm{d}v) = |u|$, la última igualdad se tiene ya que $z\int Re(v)\mu_\omega(\,\mathrm{d}v) = zRe(\int v\mu_\omega(\,\mathrm{d}v)) = 0$, por lo tanto $Re(z(u - v)) = |u - v|$ μ_ω-c.s., es decir $im(z(u - v)) = 0$ μ_ω-c.s., de donde $z(u - v) = Re(z(u - v)) = |u - v|$ μ_ω-c.s., por lo que lo anterior es válido para todo $v \in supp(\mu_\omega)$.

Se asegura que $supp(\mu_\omega)$ está en un semirayo que surge de u, para ello las siguientes consideraciones geométricas, para todo $v \in supp(\mu_\omega)$ al multiplicar por z se da una rotación de tal modo que $z(u - v)$ es un número real no negativo, luego se tiene que

v debe de estar en un semirayo que pasa por u, de otra forma la rotación no quedaría dentro del eje real no negativo, ya que habría un $v' \in supp(\mu_\omega)$ tal que $z(u-v')$ no sería un real no negativo, lo anterior es equivalente a que $supp(\mu_\omega)$ está contenido en un semirayo que pasa por u.

Por el párrafo anterior, si hubiera al menos 3 elementos distintos en $supp(\mu_\omega)$, estos estarían en un semirayo, siempre se puede seleccionar uno de tal modo que sus diferencias con los otros 2 tengan argumento con signo contrario, lo cual implica una contradicción, ya que por el párrafo anterior, las diferencias se pueden rotar un mismo ángulo de tal modo que sean números reales no negativos, lo cual es imposible si tienen argumento con signo contrario, por lo tanto $supp(\mu_\omega)$ es a lo mas 2 puntos P-c.s., a dichos puntos se les llamará $X(\omega)$ y $Y(\omega)$, pudiendo ser iguales si el soporte es un solo punto.

Ya que para cada $\omega \in \Omega$ se tiene que μ_ω es una probabilidad y su soporte es a lo más dos puntos $X(\omega)$ y $Y(\omega)$, entonces P-c.s. se tiene que $\mu_\omega = (1-\theta(\omega))\delta_{X(\omega)} + \theta(\omega)\delta_{Y(\omega)}$ donde $\theta(\omega) \in [0,1]$ y δ_u es la medida de Dirac en $\mathbb{C}$ con soporte en u, se observa que si $\theta(\omega) = 0$ o 1, entonces $supp(\mu_\omega)$ es solo un punto, es decir $X(\omega) = Y(\omega)$.

Ya que $0 = \int u\mu_\omega(\,\mathrm{d}u) = (1-\theta(\omega))X(\omega) + \theta(\omega)Y(\omega)$, entonces 0 es combinación convexa de $X(\omega)$ y $Y(\omega)$, luego $0 \in [X(\omega), Y(\omega)]$ P-c.s., donde $[X(\omega), Y(\omega)]$ representa la envolvente convexa de $\{X(\omega), Y(\omega)\}$, por lo tanto para todo $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega) = Y(\omega)$ se tiene que $X(\omega) = Y(\omega) = 0$, es decir $X = Y = 0$ en $\{X = Y\}$.

Se consideran $x, y \in K$, entonces por la Proposición 25, $E(\int(\frac{1}{2}|x-u| + \frac{1}{2}|y-u| + |\frac{1}{2}(x+y)-u|)\mu(\,\mathrm{d}u)) = 0$, y ya que $|\frac{1}{2}(x(\omega)+y(\omega))-u| \leq \frac{1}{2}|x(\omega)-u| + \frac{1}{2}|y(\omega)-u|$ para todo $\omega \in \Omega$ y $u \in \mathbb{C}$, se tiene que $|\frac{1}{2}(x(\omega)+y(\omega))-u| = \frac{1}{2}|x(\omega)-u| + \frac{1}{2}|y(\omega)-u|$ P-c.s., μ_ω-c.s.

Lo anterior es equivalente a que dado $\omega \in \Omega$ fuera de un conjunto de medida cero, el cual depende de x y y, y $u \in supp(\mu_\omega)$ se cumple $|\frac{1}{2}(x(\omega)+y(\omega))-u| = \frac{1}{2}|x(\omega)-u| + \frac{1}{2}|y(\omega)-u|$, esto implica que $\frac{1}{2}(x(\omega)-u)$ y $\frac{1}{2}(y(\omega)-u)$ tienen el mismo argumento, de donde $x(\omega)-u$ y $y(\omega)-u$ tienen el mismo argumento, por lo tanto $x(\omega)$ y $y(\omega)$ están en un semirayo que pasa por u, este argumento es válido cuando $u = X(\omega)$ y $u = Y(\omega)$, de donde $x(\omega)$ y $y(\omega)$ están en un semirayo que parte de $X(\omega)$ y también en un semirayo que parte de $Y(\omega)$, es decir, $x(\omega), y(\omega) \in [X(\omega), Y(\omega)]$ en $\{X \neq Y\}$ P-c.s. y en $\{X = Y\}$ se tiene que $x(\omega), y(\omega)$ están en un semirayo que parte de $X(\omega) = Y(\omega)$ P-c.s. $\cdots(\triangle)$

Se afirma que las funciones X y Y son medibles, para dar prueba de ello se consideran funciones $f(\omega, u)$ tal que $0 < f(\omega, u) \leq u$ si $u > 0$ y $f(\omega, u) = 0$ de otra forma, se observa que $h(\omega) = \int f(\omega, u)\mu(\,\mathrm{d}u)$ es medible y que $h(\omega) \leq Y(\omega)$, por lo tanto tomando el supremo sobre las f, se concluye que $Y(\omega)$ es medible, de forma análoga se prueba que X es medible.

Puesto que K es separable, entonces se puede construir un subconjunto N de Ω con $P(N) = 0$ y tal que para todo $\omega \notin N$ y $x, y \in K$ lo anterior vale, para ello se considera $S = \{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de K, para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera N_n un subconjunto de Ω con medida cero y tal que $(\triangle)$ vale para $y_n(\omega)$ si $\omega \notin N_n$.

Se llama $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, así $P(N) = 0$.

Se observa que si $y \in conv(\{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\})$ con $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{n_k}$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ y $\lambda_k \geq 0$ para todo $1 \leq k \leq n$, entonces para $\omega \in \{X \neq Y\} - N$ se tiene que $y_{n_k}(\omega) \in [X(\omega), Y(\omega)]$, de donde $y(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{n_k}(\omega) \in [X(\omega), Y(\omega)]$.

Sea $y \in \overline{conv}(\{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\})$, entonces existe (c_n) sucesión en $conv(\{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\})$ que converge en $\|\cdot\|_1$ a y, así para $\omega \in \{X \neq Y\} - N$ se tiene que $y(\omega) = \lim_n c_n(\omega)$, y dado que $c_n(\omega) \in [X(\omega), Y(\omega)]$, se concluye que $y(\omega) = \lim_n c_n(\omega) \in [X(\omega), Y(\omega)]$ si $\omega \in \{X \neq Y\} - N$.

De forma análoga, debido a que los semirayos son cerrados en $\mathbb{C}$, se concluye que $y(\omega)$ tiene el mismo argumento para todo $\omega \in \{X = Y\} - N$.

Por lo tanto, la densidad de S en K y la convexidad de K, implican que $\overline{conv}(S) = K$, por lo tanto $y(\omega) \in [X(\omega), Y(\omega)]$ para todo $y \in K$ y $\omega \in \{X \neq Y\} - N$ y $y(\omega)$ tiene el mismo argumento para todo $\omega \in \{X = Y\} - N$ y $y \in K$.

Como $0 \in K$, entonces para todo $\omega \notin N$ se tiene que $0 \in [X(\omega), Y(\omega)]$, de donde fijando $\omega \notin N$ se tiene que $x(\omega)$ está en una recta que pasa por el 0 para todo $x \in K$, de donde existe un $z_\omega \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ y argumento no negativo tal que $z_\omega x(\omega) \in \mathbb{R}$.

Se define $G : \Omega \to \mathbb{C}$ mediante $G(\omega) = z_\omega$, puesto que se trasladó K de tal modo que x_0, el ω-límite de (x_n), fuera igual a 0, entonces si se considera K como el conjunto original, se tiene que $G(x - x_0)$ es de valor real para todo $x \in K$.

Se observa que dado $x \in K$ con $x \neq 0$, se tiene que $G(\omega) = arg(x(\omega))$ para todo $\omega \in supp(x)$, cuando $x(\omega) = 0$ no se puede asegurar cual es el valor $G(\omega)$, salvo que $x(\omega) = 0$ para todo $x \in K$, en cuyo caso $G(\omega) = 0$.

Para demostrar que G es medible, se considera un conjunto denso numerable $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en K, se probó que $\overline{conv}(\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = K$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $E_n = supp(y_n)$ y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, se observa que $x(\omega) = 0$ para todo $x \in K$ y $\omega \in E^c$, por lo que $G(\omega) = 0$ para todo $\omega \in E$, así:

$$G(\omega) = \begin{cases} arg(y_n(\omega)) & \text{, si existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \omega \in E_n \\ 0 & \text{, si } \omega \in E^c \end{cases}$$

Ya que E_n y E^c son medibles para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces G es medible.

2) Se supone que $K \subset L_1(P)$ solo contiene funciones de valor real, luego las funciones X y Y que se construyeron en la demostración del inciso 1) satisfacen $X \leq 0 \leq Y$, esto se tiene ya que todos los elementos de K solo adoptan valores reales.

Se tiene que $X(\omega) \leq x(\omega) \leq Y(\omega)$ en $\{X < Y\}$ P-c.s. para todo $x \in K - x_0$, donde $x_0 = \omega - \lim_{\mathscr{U}} x_n$, además $x(\omega)$ tiene el mismo signo para todo $x \in K$ si $\omega \in \{X = Y\}$ esto porque todos los $x(\omega)$ están en un semirayo que parte del 0.

Para cada $\alpha \in D$, sean X_α y Y_α las respectivas funciones asociadas a (x_n^α), es decir, las funciones construidas en el inciso 1) de tal modo que $\{X(\omega), Y(\omega)\}$ es el soporte de la componente ω-ésima de la probabilidad aleatoria $\mu_\alpha = (\mu_\omega^\alpha)$ asociada a la a.f.p.s. (x_n^α) y ultrafiltro $\mathscr{U}$.

Dado $\alpha_0 \in D$ fijo, se tiene que en el conjunto $\{X_{\alpha_0} < Y_{\alpha_0}\}$ se satisface $X_{\alpha_0} \leq x \leq Y_{\alpha_0}$ para todo $x \in K - x_\alpha$ con $x_\alpha = \omega - \lim_{n,\mathscr{U}} x_n^\alpha$, en particular $X_{\alpha_0} \leq x_n^\alpha \leq Y_{\alpha_0}$ para todo $\alpha \in K$ y $n \in \mathbb{N} \cdots (\star)$

Por las observaciones dadas después de la Proposición 25, se tiene que si (x_n) es una sucesión en $L_1(P)$ uniformemente integrable, de tal modo que todos sus elementos son de valor real, entonces $supp(\mu_\omega) \subset \mathbb{R}$, con $\mu = (\mu_\omega)_{\omega \in \Omega}$ la probabilidad aleatoria asociada a (x_n) dado un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en $\mathbb{N}$ que no es principal, adicionalmente, si existen funciones medibles X y Y tales que $X(\omega) \leq x_n(\omega) \leq Y(\omega)$ P-c.s., entonces $supp(\mu_\omega) \subset [X(\omega), Y(\omega)]$ P-c.s.

Así de $(\star)$ se sigue que en $\{X_{\alpha_0} < Y_{\alpha_0}\}$ para cada $\alpha \in D$ se tiene $X_{\alpha_0} \leq X_\alpha \leq Y_\alpha \leq Y_{\alpha_0}$.

Recíprocamente si se fija $\alpha \in D$, entonces se tiene que $X_\alpha \leq X_{\alpha_0} \leq Y_{\alpha_0} \leq Y_\alpha$ en $\{X_\alpha < Y_\alpha\}$, por lo tanto para cada $\alpha \in D$, en el conjunto $\{X_{\alpha_0} < Y_{\alpha_0}\} \cap \{X_\alpha < Y_\alpha\}$ se cumple $X_\alpha = X_{\alpha_0}$ y $Y_\alpha = Y_{\alpha_0}$.

En $\{X_\alpha = Y_\alpha\}$ se tiene que $x(\omega)$ tiene el mismo signo para todo $x \in K - x_\alpha$, entonces en $\{X_{\alpha_0} < Y_{\alpha_0}\} \cap \{X_\alpha = Y_\alpha\}$ se cumple que $X_{\alpha_0} \leq x_n^\alpha \leq Y_{\alpha_0}$ y que $x_n^{\alpha_0}(\omega)$ está en un semirayo que parte de $X_\alpha(\omega) = Y_\alpha(\omega) = 0$, se supone que dicho semirayo está en el eje positivo, luego de las observaciones dadas después de la Proposición 25 se sigue, $X_\alpha(\omega) \geq X_{\alpha_0}(\omega)$ y $X_{\alpha_0}(\omega) \geq X_\alpha(\omega)$ en $\{X_{\alpha_0} < Y_{\alpha_0}\} \cap \{X_\alpha = Y_\alpha\}$, asi $X_\alpha = Y_\alpha = X_{\alpha_0}$ en $\{X_{\alpha_0} < Y_{\alpha_0}\} \cap \{X_\alpha = Y_\alpha\}$ si el semirayo que parte de $X_\alpha(\omega) = Y_\alpha(\omega)$ es positivo, de forma análoga se prueba cuando el semirayo es negativo que $X_\alpha = Y_\alpha = Y_{\alpha_0}$ en $\{X_{\alpha_0} < Y_{\alpha_0}\} \cap \{X_\alpha = Y_\alpha\}$.

En los últimos dos párrafos se probó que dado $\alpha_0 \in D$ fijo y $\omega \in \{X_{\alpha_0} < Y_{\alpha_0}\}$, se tiene que el conjunto $\{X_\alpha(\omega), Y_\alpha(\omega) \mid \alpha \in D\}$ tiene a lo mas dos puntos P-c.s.

Por lo tanto, para cada $\omega \in \displaystyle\bigcup_{\alpha \in D} \{X_\alpha < Y_\alpha\}$ se tiene que el conjunto $\{X_\alpha(\omega), Y_\alpha(\omega) \mid \alpha \in D\}$ tiene a lo mas dos puntos P-c.s.

Si $\omega \notin \displaystyle\bigcup_{\alpha \in D} \{X_\alpha < Y_\alpha\}$ fijo, entonces $\omega \in \{X_\alpha = Y_\alpha\}$ para todo $\alpha \in D$, se fija $\alpha_0 \in D$, luego para todo $x \in K$ se cumple $x(\omega)$ está en un semirayo que parte de X_{α_0}, por lo cual $x_n^\alpha(\omega)$ está en dicho semirayo, sin pérdida de generalidad se puede suponer que el semirayo está en el eje positivo, así de las observaciones dadas después de la Proposición 25, se sigue que $X_\alpha(\omega) \geq X_{\alpha_0}(\omega)$, de forma análoga se prueba la otra desigualdad, por lo tanto en $(\displaystyle\bigcup_{\alpha \in D} \{X_\alpha < Y_\alpha\})^c$ se tiene que $\{X_\alpha(\omega), Y_\alpha(\omega) \mid \alpha \in D\}$ tiene a lo mas dos puntos P-c.s.

Así existen U y V funciones tales que para toda $\mu = (\mu_\omega)_{\omega \in \Omega}$ probabilidad aleatoria asociada a una a.f.p.s. dado un ultrafiltro y $\omega \in \Omega$ se cumple $supp(\mu_\omega) \subset \{U(\omega), V(\omega)\}$ P-c.s. $\cdots (\triangle)$

Las funciones U y V son medibles, se sabe que para cada $\alpha \in D$, las funciones X_α y Y_α que determinan los soportes de las componentes de la probabilidad aleatoria μ_α, inducida por la a.f.p.s. (x_n^α) y ultrafiltro $\mathscr{U}$, son medibles, luego las funciones $U = \min\limits_{\alpha\in D} X_\alpha$ y $V = \max\limits_{\alpha\in D} Y_\alpha$ son medibles por ser D numerable, satisfacen $(\triangle)$ y $U \leq V$.

Se supone que $U \leq V$ y se considera $f(\omega,u) = 1 \wedge |u - U(\omega)| \wedge |u - V(\omega)|$, entonces si $\mu = (\mu_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es la probabilidad aleatoria asociada a la a.f.p.s. (x_n) y ultrafiltro $\mathscr{U}$, se tiene que $supp(\mu_\omega) \subset \{U(\omega), V(\omega)\}$ P-c.s. y que $\displaystyle\int f(\omega,u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u) = (1-\theta(\omega))f(\omega,U(\omega))+\theta(\omega)f(\omega,V(\omega)) = (1-\theta(\omega))0+\theta(\omega)0 = 0$ P-c.s., donde $\theta(\omega) \in [0,1]$ es tal que $\mu_\omega = (1-\theta(\omega))\delta_{U(\omega)} + \theta(\omega)\delta_{V(\omega)}$, por lo tanto $E(\displaystyle\int f(\omega,u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)) = 0$.

Puesto que f es medible y no crece más rápido que $|u|$ en ∞, de hecho es menor o igual a 1, entonces por la Proposición 24 se tiene que $\lim\limits_{n,\mathscr{U}} E(1\wedge|x_n - U|\wedge|x_n - V|)$ $= \lim\limits_{n,\mathscr{U}} E(f(\omega,x_n(\omega))) = E(\displaystyle\int f(\omega,u)\mu_\omega(\,\mathrm{d}u)) = 0$.

Por lo tanto existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim\limits_{k} E(1 \wedge |x_{n_k} - U| \wedge |x_{n_k} - V|) = 0$, de donde existe una subsucesión $(x_{n_{k_r}})$ de (x_{n_k}) tal que $1 \wedge |x_{n_{k_r}} - U|\wedge|x_{n_{k_r}} - V|$ converge a 0 puntual P-c.s., por lo tanto $|x_{n_{k_r}} - U|\wedge|x_{n_{k_r}} - V|$ converge a 0 puntual P-c.s.

Dado $\omega \in \Omega$ fijo y $\epsilon > 0$ se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $r \geq N$, entonces $|U(\omega) - x_{n_{k_r}}(\omega)| \wedge |V(\omega) - x_{n_{k_r}}(\omega)| < \epsilon$, de donde dado $r \geq N$ se tiene que $|U(\omega) - x_{n_{k_r}}(\omega)| < \epsilon$ o $|V(\omega) - x_{n_{k_r}}(\omega)| < \epsilon$, por lo tanto $||U(\omega)| - |x_{n_{k_r}}(\omega)|| < \epsilon$ o $||V(\omega)| - |x_{n_{k_r}}(\omega)|| < \epsilon$, así $(|U(\omega)| - |x_{n_{k_r}}(\omega)|) \wedge (|U(\omega)| - |x_{n_{k_r}}(\omega)|) < \epsilon$ para todo $r \geq N$, así $|U(\omega)|\wedge|V(\omega)| < |x_{n_{k_r}}(\omega)| + \epsilon$ para todo $r \geq N$, de donde $|U(\omega)|\wedge|V(\omega)|$ $\leq \liminf |x_{n_{k_r}}(\omega)|$, es decir $|U| \wedge |V| \leq \liminf |x_{n_{k_r}}|$.

Como $|x_{n_{k_r}}|$ es integrable para cada $r \in \mathbb{N}$, entonces del Lema de Fatou se sigue que $|U| \wedge |V|$ es integrable.

Se considera $f(\omega,u) = |u - U| \wedge |u - V|$, se observa que $|u - U| \wedge |u - V| \leq (|u|+|U|)\wedge(|u|+|V|) = |u|+|U|\wedge|V|$, de donde f no crece más rápido que $|u|$ en infinito, luego por la Proposición 24 se tiene $0 = E(\displaystyle\int f(\omega,u)\mu(\,\mathrm{d}u)) = \lim\limits_{n,\mathscr{U}} E(f(\omega,x_n(\omega)))$

$= \lim\limits_{n,\mathscr{U}} E((x_n - U) \wedge |x_n - V|)$, la primera igualdad se prueba de forma análoga a como se demostró que $E(\int (1 \wedge |u - U| \wedge |u - V|)\mu(\, du)) = 0$.

Ya que la deducción del párrafo anterior vale para toda a.f.p.s. (x_n^α) con $\alpha \in D$, entonces si μ^α es la probabilidad aleatoria asociada a (x_n^α) y al ultrafiltro $\mathscr{U}$, se satisface para cada $\alpha \in D$ que $0 = E(\int f(\omega, u)\mu^\alpha(\, du)) = \lim\limits_{n,\mathscr{U}} E(|x_n^\alpha - U| \wedge |x_n^\alpha - V|)$. ■

El resultado anterior también es válido si se omite como hipótesis la reflexividad, sin embargo se enunció en dichas condiciones ya que así resulta más acorde con las hipótesis del resultado principal del presente trabajo.

La Proposición 37 de hecho prueba que todas las medidas aleatorias asociadas a sucesiones uniformemente integrables sin puntos límite fuertes, definidas en conjuntos convexos, cerrados, acotados y separables, cumplen con que los soportes de sus componentes quedan prácticamente determinados, ya que en cada componente, el soporte puede estar en a lo mas dos puntos los cuales de antemano están caracterizados.

La siguiente proposición muestra que la rotación dada por la función G de la Proposición 37, es compatible con la FPP y los operadores no expansivos, en el sentido de que un conjunto tiene la FPP si y solo si su rotación por G tiene la FPP.

***Proposición* 38.** *Sea K un subconjunto cerrado, convexo y acotado de $L_1(P)$, T un operador no expansivo de K en K, y G una función medible tal que $|G(\omega)| = 1$ P-c.s., entonces existe un operador no expansivo T' de KG en KG tal que T tiene un punto fijo si y solo T' tiene un punto fijo.*

Demostración: Se observa que la función G es integrable ya que $\int |G(\omega)|P = \int 1P$ $= 1$, luego $\|G\| = 1$

Se define $T' : KG \to KG$ dada por $T'(xG) = (Tx)G$, T' es no expansivo puesto que $\|T'(xG) - T'(yG)\| = \|(Tx)G - (Ty)G\| = \|Tx - Ty\|\|G\| = \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$.

Se observa que T tiene un punto fijo si y solo si T' tiene uno, ya que $(Tx)G = T'(xG)$ $= xG$, si y solo si $Tx = x$. ■

3.4. Copias asintóticas de ℓ_1

En la primera sección del presente capítulo, se mostró que ℓ_1 no tiene la FPP, razón por la cual resulta natural pensar que si un espacio tiene una copia de ℓ_1, entonces dicho espacio tampoco tendrá la FPP, el objetivo de la presente sección es aclarar que tipo de copias de ℓ_1 son las que al considerarse niegan la FPP.

Pese a que ℓ_1 es un espacio sin la FPP, este puede ser renormado para que con la nueva norma tenga la FPP, a saber la norma es $|||(a_n)||| = \sup\limits_n \gamma_n \sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k|$ con (γ_n) sucesión creciente en $(0,1)$ que converge a 1, la prueba se encuentra en [46].

Ya que la FPP no es una propiedad que se preserva bajo isomorfismos de espacios de Banach, es de interés estudiar isomorfismos más fuertes, de tal modo que no solo preserven la estructura topológico-algebraica, si no que también preserven parte de la estructura geométrica involucrada en la FPP y que no sean tan restrictivos como los isomorfismos isométricos.

La siguiente definición además de ser una generalización natural de la noción de base para espacios de Hilbert, posibilita tener un control explícito sobre operadores en espacios de Banach, los resultados presentados a continuación, se pueden encontrar en [50].

***Definición* 22** (Base de Schauder)**.** *Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach X es una base de Schauder (base) para X, si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares (t_n) tal que $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n$.*

Si Y es un subespacio cerrado de X y (x_n) es una base de Schauder para Y, entonces se dirá que (x_n) es una sucesión básica en X.

Se puede demostrar que toda base de Schauder es un conjunto linealmente independiente, todo espacio con una base es separable, que el conjunto de combinaciones lineales de la base es denso en el espacio y que los espacios clásicos como son ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ tienen base, al igual que $C[0,1]$ y $L_1[0,1]$.

También se puede demostrar que la imagen de un isomorfismo de espacios de Banach de un espacio con base, es un espacio con base, de tal modo que la imagen de la base es una sucesión básica en el contradominio.

Si se tiene un espacio X con una base (x_n) y un espacio Y, entonces es equivalente que X sea isomorfo a Y a que exista una base (y_n) para Y y un isomorfismo $T : X \to Y$ tal que $Tx_n = y_n$, de hecho el definir la imagen Tx_n de cada elemento de la base (x_n) de X, determina de forma única una transformación lineal.

Se puede demostrar que si un espacio de Banach X tiene una base (x_n), entonces para cada (λ_n) sucesión de escalares distintos de cero, se tiene que $(\lambda_n x_n)$ es una base para X, además si X está encajado en un espacio Y, con (y_n) base para X como subespacio de Y, entonces si adicionalmente $0 < \inf\limits_n |\lambda_n| \leq \sup\limits_n |\lambda_n| < \infty$, se tiene que el subespacio de Y cuya base es $(\lambda_n y_n)$ es isomorfo a X.

Cuando un espacio de Banach tiene encajado isomorfamente a ℓ_1, entonces se puede caracterizar la sucesión básica que lo genera como lo muestra la siguiente proposición cuya demostración se puede encontrar en [50].

***Proposición* 39.** *Sea (x_n) una sucesión en un espacio de Banach X, entonces (x_n) es una sucesión básica que genera una copia isomorfa de ℓ_1 si y solo si $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$ y existe $M > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ y escalares $t_1, \cdots, t_m$ se tiene que $\sum\limits_{n=1}^{m} |t_n| \leq M \|\sum\limits_{n=1}^{m} t_n x_n\|$.*

En la proposición anterior, se está asegurando que existe un encaje $T : \ell_1 \to X$ tal que $Te_n = x_n$, donde e_n es el vector cuya n-ésima entrada es 1 y las demás son 0 para cada $n \in \mathbb{N}$, a la colección (e_n) se le llama la *base canónica* de ℓ_1, además si $M = 1$, entonces dicho encaje es isométrico.

Bajo el supuesto de que un espacio de Banach X contiene una copia isomorfa de otro espacio de Banach Y, entonces se puede preguntar si dado $0 < \epsilon < 1$, X contiene una copia ϵ-isométrica de Y, en el sentido de que el encaje de Y en X es una ϵ-isometría.

La respuesta a la pregunta anterior cuando se considera ℓ_1 encajado isomorfamente, la da el siguiente teorema cuya demostración se encuentra en [25].

***Teorema* 23** (de distorsión de James)**.** *Sea X un espacio de Banach que contiene una copia isomorfa de ℓ_1, entonces para cada $0 < \epsilon < 1$, existe una sucesión (x_n) en X tal que $(1-\epsilon)\sum\limits_{n=1}^{\infty} |t_n| \leq \|\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n\| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |t_n|$ para todo $(t_n) \in \ell_1$.*

El teorema anterior asegura que si un espacio de Banach tiene encajado ℓ_1, entonces tiene copias ϵ-isométricas de ℓ_1 para cada $0 < \epsilon < 1$, ya que en las desigualdades $(1-\epsilon)\sum_{n=1}^{\infty}|t_n| \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|$, el primer término es la norma $\|\cdot\|_1$ del vector $(t_n) \in \ell_1$ con un ϵ error, en el sentido de ϵ-isometría, mientras que el segundo es la norma del elemento $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ asociado a (t_n) en X y el tercero es la norma de (t_n).

En un ejemplo anterior, se mostró que ℓ_1 puede ser renormado para que tenga la FPP, sin embargo, al ser ℓ_1 con la nueva norma isomorfo a ℓ_1, entonces el espacio renormado contiene copias ϵ-isométricas de ℓ_1 para cada $0 < \epsilon < 1$, razón que no impide que ℓ_1 con el renormamiento tenga la FPP, luego la FPP no se sigue ni se puede negar a partir de isomorfismos ni ϵ-isometrías aunque se tengan para cada $0 < \epsilon < 1$.

La siguiente definición está motivada en el Teorema de distorsión de James, Teorema 23 y se puede encontrar en [33].

***Definición* 23** (Copia asintóticamente isométrica de ℓ_1)**.** *Se dirá que un espacio de Banach tiene una copia asintóticamente isométrica (copia asintótica) de ℓ_1, si existen una sucesión (x_n) en X y una sucesión (ϵ_n) en $(0,1)$ que converge a 0 tal que $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n)|t_n| \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|$ para todo $(t_n) \in \ell_1$.*
En dicho caso se dirá que (x_n) genera una copia asintóticamente isométrica (copia asintótica) de ℓ_1 en X.

La sucesión (x_n) cuya existencia se asegura en la definición de copia asintótica de ℓ_1, es una sucesión básica cuyo espacio generado es isomorfo a ℓ_1, la norma de los elementos x_n cumple $0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| = 1$, de hecho cuando $n \to \infty$ se tiene que $\|x_n\| \to 1$, ya que $(1-\epsilon_n) \leq \|x_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Al igual que en las copias isomorfas de ℓ_1, si (x_n) genera una copia asintótica de ℓ_1 en un espacio X, entonces existe un encaje $T : \ell_1 \to X$ tal que $Te_n = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con (e_n) la base canónica de ℓ_1.

Si (x_n) genera una copia asintótica de ℓ_1, entonces $(x_n)_{n=N}^{\infty}$ genera una copia asintótica de ℓ_1 para cada $N \in \mathbb{N}$.

En la demostración del Teorema de distorsión de James se puede asegurar la existencia de una sucesión (ϵ_n) en $(0,1)$ que converge a 0 tal que $(1-\epsilon_k)\sum_{n=k}^{\infty}|t_n| \leq \|\sum_{n=k}^{\infty} t_n x_n\| \leq \sum_{n=k}^{\infty}|t_n|$ para todo $(t_n) \in \ell_1$ y todo $k \in \mathbb{N}$, razón que motivó la definición de copia asintótica de ℓ_1.

El siguiente resultado muestra como espacios que tienen copias isomorfas de ℓ_1, en sus duales tienen copias isomorfas de espacios clásicos, la prueba se encuentra en [34].

***Teorema* 24.** *Sea X un espacio de Banach, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) X contiene una copia isomorfa de ℓ_1

2) X^* contiene una copia isomorfa de $C[0,1]^*$

3) X^* contiene una copia isomorfa de $L_1[0,1]^*$

Además si X es separable, 1), 2) *y* 3) *son equivalentes a*

4) X^* contienen una copia isomorfa de $\ell_1(\Gamma)$ para algún conjunto no numerable Γ

El siguiente resultado es el análogo al teorema anterior en el caso de copias asintóticas, la prueba se puede encontrar en [20].

***Teorema* 25.** *Sea X un espacio de Banach, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) X contiene una copia asintótica de ℓ_1

2) X^* contiene una copia isométrica de $C[0,1]^*$

3) X^* contiene una copia isométrica de $L_1[0,1]^*$

Es sabido que ℓ_1 es un espacio separable y que $C[0,1]^*$ no lo es, sin embargo, el teorema anterior asegura que basta probar que X tiene un espacio separable para garantizar que hay un espacio que no es separable en su dual.

Es un resultado conocido que $L_1[0,1]$ no tiene predual y que $L_1[0,1]$ es un subespacio cerrado de $C[0,1]^*$, el teorema anterior asegura un tipo de minimalidad de $C[0,1]^*$ respecto a $L_1[0,1]$, en el sentido de que si $L_1[0,1]$ está en el dual de un espacio, entonces también está $C[0,1]^*$.

Una consecuencia del teorema anterior es que tanto $C[0,1]$, $C[0,1]^*$ y en consecuencia $L_1[0,1]$ son subespacios cerrados de ℓ_∞, de hecho se puede probar mas, que todo dual de un espacio separable se puede encajar en ℓ_∞.

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente corolario.

***Corolario* 11.** *Sea X un espacio de Banach con una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1, entonces X^* no tiene la ω-FPP.*

Demostración: Ya que X tiene una copia asintótica de ℓ_1, entonces por el Teorema 25, X^* tiene una copia isomorfa de $L_1[0,1]$ y ya que $L_1[0,1]$ no cumple la ω-FPP por la Baker's function, se concluye que X^* no tiene la ω-FPP. ■

El siguiente resultado muestra que las sucesiones que en cierta forma se aproximan a las sucesiones que generan copias asintóticas de ℓ_1, también generan copias asintóticas de ℓ_1.

***Proposición* 40.** *Sea X un espacio de Banach, (x_n) y (y_n) sucesiones en X, tales que (x_n) genera una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 y $\lim\limits_n \|x_n - y_n\| = 0$, entonces si $\|y_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que la subsucesión $(y_n)_{n=N}^\infty$ de (y_n) genera una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1, en otro caso, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la subsucesión $(\frac{y_n}{\|y_n\|})_{n=N}^\infty$ de la sucesión $(\frac{y_n}{\|y_n\|})$ genera una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1.*

Como se mencionó al principio de esta sección, el objetivo es dar un tipo de isomorfismos a partir de los cuales se siga la negación de la FPP, el siguiente resultado fue probado por Dowling y Lennard en [21].

***Teorema* 26.** *Sea X un espacio de Banach que tiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1, entonces X no satisface la FPP.*

Demostración: Dado que X tiene una copia asintótica de ℓ_1, entonces existe una sucesión (x_n) en X y una sucesión (ϵ_n) en $(0,1)$ que converge a 0 tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n)|t_n|$ $\leq \|\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n\| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n|$ para todo $(t_n) \in \ell_1$.

Dada una sucesión estrictamente decreciente (λ_n) en $(1,2)$ que converge a 1, se observa que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces como (ϵ_n) converge a 0, se puede construir una sucesión creciente (n_k) en $\mathbb{N}$ tal que $\lambda_{k+1} < (1-\epsilon_{n_k})\lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se observa que las sucesiones (x_{n_k}) y (ϵ_{n_k}) también generan una copia asintótica de ℓ_1, esto porque basta considerar los elementos $(t_n) \in \ell_1$ tales que $t_n = 0$ si $n \neq n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y aplicarlos en la definición de copia asintótica.

Por lo anterior, sin perdida de generalidad se puede suponer que la sucesión (ϵ_n) satisface $\lambda_{n+1} < (1 - \epsilon_n)\lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $y_n = \lambda_n x_n$ y se llama $C = \overline{conv}\{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, puesto que $\sup\limits_n \|y_n\| = \sup\limits_n(\lambda_n \|x_n\|) \leq (\sup\limits_n \lambda_n)(\sup\limits_n \|x_n\|) \leq 2$, entonces C es cerrado, convexo y acotado.

Se afirma que C es igual al conjunto $C' = \{\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_n \,|\, t_n \geq 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = 1\}$, para demostrarlo, se observa que si Y es la cerradura del espacio generado por $\{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, entonces existe un operador lineal acotado $H : \ell_1 \to Y$ dado por $He_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ con (e_n) la base canónica de ℓ_1.

La existencia de H se sigue de que el espacio generado por $(\lambda_n x_n)$ es isomorfo al espacio generado por (x_n), ya que $0 < \inf\limits_n |\lambda_n| \leq \sup\limits_n |\lambda_n| = 1$ y como el espacio generado por (x_n) es isomorfo a ℓ_1, entonces se tiene que el espacio generado por $(\lambda_n x_n) = (y_n)$ es isomorfo a ℓ_1, de donde existe H.

Ahora como H es un isomorfismo, se sigue que $H\, \overline{conv}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \overline{conv}\{He_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \overline{conv}\{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = C'$, es un resultado conocido que $\overline{conv}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_n \,|\, t_n \geq 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = 1\}$, de donde $C' = H\, \overline{conv}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = H\, \{\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n e_n \,|\, t_n \geq 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = 1\} = \{\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_n \,|\, t_n \geq 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = 1\} = C$.

Se define $T : C \to C$ dado por $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_{n+1}$, T no tiene puntos fijos, ya que si $Ty = y$ para algún $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_n \in C$, entonces $t_n = t_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t_1 = 0$, de donde $t_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $y \notin C$.

T es no expansivo, sean $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_n$, $w = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n y_n \in C$, con $y \neq w$, luego $\|Ty - Tw\|$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n - s_n|\|y_{n+1}\| = \sum_{n=1}^{\infty}|t_n - s_n|\lambda_n\|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n - s_n|\lambda_{n+1} < \sum_{n=1}^{\infty}|t_n - s_n|(1-\epsilon_n)\lambda_n$$

$\leq \|\sum_{n=1}^{\infty}(t_n - s_n)\lambda_n x_n\| = \|y - w\|$, la última desigualdad se tiene porque $(\lambda_n x_n)$ genera una copia asintótica de ℓ_1.

Por lo tanto X no tiene la FPP. ■

3.5. Copias asintóticas de ℓ_1 y $L_1(\mu)$

El objetivo de la presente sección es mostrar espacios que tienen copias asintóticas de ℓ_1, en particular $L_1(\mu)$, con tal propósito se probarán resultados concernientes a la ω-compacidad en $L_1(\mu)$.

Es natural buscar copias asintóticas de ℓ_1 en los subespacios de ℓ_1, el siguiente resultado responde dicha pregunta, su prueba se encuentra en [42] capítulo 9.

Teorema 27. *Todo subespacio cerrado infinito dimensional de* $(\ell_1, \|\cdot\|)$ *contiene una copia asintóticamente isométrica de* ℓ_1.

El resultado anterior cierra la posibilidad de buscar la FPP en subespacios infinito dimensionales de ℓ_1.

El objetivo es mostrar un resultado análogo al anterior para el espacio $L_1(\mu)$.

El siguiente resultado intuitivamente indica que las sucesiones acotadas en $L_1(\mu)$ son prácticamente ω-compactas, ya que se les puede extraer una sucesión que es casi ω-convergente en un sentido semejante a P-c.s., fue demostrado por Kadets y Pelczynski, su prueba se encuentra en [1].

Teorema 28 (Subsequence Splitting Lemma)***.*** *Sea* (f_n) *una sucesión acotada en* $L_1(\mu)$*, entonces existe una subsucesión* (g_n) *de* (f_n) *y una sucesión de conjuntos medibles ajenos por parejas* (A_n)*, tal que si* $B_n = \Omega - A_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, se tiene que la sucesión* $(g_n \chi_{B_n})$ *es uniformemente integrable.*

Otra forma de ver el Subsequence Splitting Lemma es que dada una sucesión (f_n) acotada en $L_1(\mu)$, entonces existe una subsucesión (g_n) de (f_n) de tal modo que

$g_n = u_n + v_n$, con (u_n) uniformemente integrable y (V_n) con soportes ajenos por parejas, para construir dichas sucesiones basta considerar $u_n = g_n\chi_{B_n}$ y $v_n = g_n\chi_{A_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado fue probado por Dowling, Lennard y Turett en [22] y asegura la existencia de copias asintóticas en subespacios de $L_1(\mu)$.

***Teorema* 29.** *Si X es un subespacio que no es reflexivo de $(L_1(\mu), \|\cdot\|_1)$, entonces X tiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1.*

Demostración: Las siguientes afirmaciones se pueden consultar en [50], se utilizará indistintamente ω-compacidad relativa y uniformemente integrable por el Teorema de Dunford-Pettis, Teorema 11.

Dado que X no es reflexivo, entonces existe un subespacio Y de X que no es reflexivo y es separable, de donde B_Y no es ω-compacta, luego existe un subconjunto infinito E de B_Y sin ω-puntos límites, por ser Y separable, a partir de E se puede construir una sucesión (f_n) en B_Y sin subsucesiones ω-convergentes, puesto que (f_n) es acotada, entonces por el Subsequence Splitting Lemma, Teorema 28 se puede suponer sin pérdida de generalidad que (f_n) es tal que $f_n = u_n + v_n$ con (u_n) ω-compacta relativa y (v_n) con soportes ajenos por parejas, se observa que las sucesiones (u_n) y (v_n) están en $L_1(\mu)$.

La sucesión (v_n) satisface $\liminf\|v_n\| > 0$, ya que si $\liminf\|v_n\| = 0$, entonces existiría una subsucesión (v_n') de (v_n) tal que $(\|v_n'\|)$ es decreciente y $\lim_n \|v_n'\| = 0$, luego con los índices asociados a dicha subsucesión, se pueden considerar las subsucesiónes (f_n') de (f_n) y (u_n') de (u_n), luego dado que $f_n' = u_n' + v_n'$ para cada $n \in \mathbb{N}$, (v_n') converge a 0 en norma y (u_n') es una subsucesión de una sucesión ω-convergente, se tiene que (f_n') es ω-convergente al ω-límite de (u_n') que es igual al de (u_n), lo cual es una contradicción, ya que (f_n) no tiene subsucesiones ω-convergentes, por lo tanto $\liminf\|v_n\| > 0$.

Por lo anterior se puede suponer sin perdida de generalidad que $\|v_n\| > m > 0$ para algún $m > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Ya que (u_n) es ω-compacta relativa, entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad que (u_n) es ω-convergente, como las operaciones vectoriales son ω-continuas, entonces la sucesión $(u_{2n} - u_{2n+1})$ es ω-convergente a 0, de donde, por el Teorema de Mazur, existe una sucesión (h_n) de combinaciones convexas de la sucesión $(u_{2n} - u_{2n+1})$ que converge en norma a 0.

La sucesión (h_n) se puede suponer sin pérdida de generalidad que satisface las siguientes condiciones, existe una sucesión creciente (k_n) en $\mathbb{N}$ y una sucesión de escalares reales no negativos (a_n) tales que $h_n = \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}-1} a_i(u_{2i} - u_{2i-1})$.

Para garantizar la afirmación anterior, se construye inductivamente una sucesión (h_n), para $s = 1$, por el Teorema de Mazur existe una sucesión (h_n^1) de combinaciones convexas de $(u_{2n} - u_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ que converge en norma a 0, luego dado $\epsilon_1 = 1$ se tiene que existe $h_{n_1}^1$ tal que $\|h_{n_1}^1\| < \epsilon_1$, dado que $h_{n_1}^1$ es combinación convexa de elementos de $(u_{2n} - u_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$, se llama $k_1 = 1$, entonces existe $k_2 \in \mathbb{N}$ y escalares reales no negativos $a_{k_1}, \cdots, a_{k_2-1}$ con $\sum_{i=k_1}^{k_2-1} a_i = 1$, tales que $h_{n_1}^1 = \sum_{i=k_1}^{k_2-1} a_i(u_{2i} - u_{2i+1})$, se llama $h_1 = h_{n_1}^1$.

Luego se suponen construidos h_j para $j < s$, entonces como $(u_{2n} - u_{2n+1})_{n=K_s-1}^{\infty}$ es ω-convergente a 0, por el Teorema de Mazur existe una sucesión de combinaciones convexas de $(u_{2n} - u_{2n+1})_{n=k_s-1}^{\infty}$ que converge en norma a 0, entonces para $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ se tiene que existe $h_{n_s}^s$ con $\|h_{n_s}^s\| < \epsilon_s$, $k_s \in \mathbb{N}$ y escalares reales no negativos $a_{k_{s-1}}, \cdots, a_{k_s-1}$ con $\sum_{i=k_{s-1}}^{k_s-1} a_i = 1$, tal que $h_{n_s}^s = \sum_{i=k_{s-1}}^{k_s-1} a_i(u_{2i} - u_{2i+1})$, se llama $h_s = h_{n_s}^s$.

Se definen $w_n = \sum_{i=k_n}^{k_n-1} a_i(v_{2i} - v_{2i+1})$ y $x_n = \sum_{i=k_n}^{k_n-1} a_i(f_{2i} - f_{2i+1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se observa que (x_n) está contenida en X y que $\|x_n - w_n\| = \|h_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ya que (v_n) tiene soportes ajenos por parejas, entonces (w_n) tiene soportes ajenos por parejas, entonces para cada $(t_n) \in \ell_1$ se tiene que $\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{w_n}{\|w_n\|}\| = \int_{\Omega} |\sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{w_n}{\|w_n\|}| \, \mathrm{d}\mu$ $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |t_n \frac{w_n}{\|w_n\|}| \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| = \|(t_n)\|$, luego por la Proposición 39, la sucesión $(\frac{w_n}{\|w_n\|})$ genera una copia isométrica de ℓ_1, en particular una copia asintótica de ℓ_1.

Puesto que $\|v_n\| > m$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y (v_n) tiene soportes ajenos por parejas, se tiene que $\|w_n\| = \|\sum_{i=k_n}^{k_n-1} a_i(v_{2i} - v_{2i+1})\| = \sum_{i=k_n}^{k_n-1} a_i(\|v_{2i}\| + \|v_{2i+1}\|) \geq 2m$ para todo

$n \in \mathbb{N}$.

Se observa que $(\frac{h_n}{\|w_n\|})$ converge a 0 en norma, ya que $\|\frac{h_n}{\|w_n\|}\| = \frac{\|x_n - w_n\|}{\|w_n\|} \to 0$ si $n \to \infty$.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\|\frac{h_n}{\|w_n\|}\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, solo se considerará la subsucesión dada por los n suficientemente grandes de tal modo que $\|\frac{h_n}{\|w_n\|}\| \leq 1$.

Así $(\frac{w_n}{\|w_n\|})$ genera una copia asintótica de ℓ_1 y $\|\frac{x_n - w_n}{\|w_n\|}\| = \|\frac{h_n}{\|w_n\|}\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego por la Proposición 40, se tiene que una subsucesión de $(\frac{x_n}{\|w_n\|})$ genera una copia asintótica de ℓ_1 o una subsucesión de su normalización genera una copia asintótica de ℓ_1. ■

Capítulo 4

Teorema de Maurey y su recíproco

El objetivo de este capítulo es emplear las técnicas desarrolladas en los capítulos precedentes para dar prueba del resultado principal del presente trabajo llamado el Teorema de Maurey, así como su recíproco, finalmente se mostrará otra aplicación de las técnicas desarrolladas para emplearlas en un resultado de punto fijo en el espacio de Hardy H^1.

4.1. Teorema de Maurey

El Teorema de Maurey, es uno de varios resultado de punto fijo y geometría de espacios de Banach los cuales relacionan la FPP con la reflexividad, de hecho fue un problema abierto por varios años si la FPP es equivalente a reflexividad, en el capítulo 3, se mostró un renormamiento de ℓ_1 el cual lo hace tener la FPP, de lo cual se sigue que hay un espacio no reflexivo con la FPP, por lo que FPP no implica reflexividad, el recíproco de dicha afirmación, al momento es un problema abierto.

El Teorema de Maurey muestra que en $L_1(P)$, reflexividad implica FPP, es decir, los subespacios cerrados y reflexivos de $L_1(P)$ tienen la FPP, cabe mencionar que al ser espacios reflexivos, la FPP coincide con la ω-FPP.

La primera demostración que se tiene del Teorema de Maurey, fue hecha por Maurey en [52], la prueba que se presentará es la misma.

***Teorema* 30** (Maurey)**.** *Todo subespacio cerrado y reflexivo de $L_1(P)$ tiene la FPP.*

Demostración: Por contradicción, se supone que hay un subespacio X' de $L_1(P)$ cerrado y reflexivo sin la FPP, entonces existe un subconjunto C de X' convexo, cerrado y acotado y un operador $T : C \to C$ no expansivo y sin puntos fijos.

Dado que C es un subconjunto convexo y cerrado, entonces por el Teorema de Mazur es ω-cerrado, luego por la reflexividad de X', C es ω^*-cerrado, de donde, por el Teorema de Banach-Alaoglu y la reflexividad, C es ω-compacto, así por la Proposición 29, existe K un subconjunto convexo y cerrado de C que es T-minimal.

Se supone $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que no es principal.

Por la Proposición 9 el conjunto K es separable y está encajado en un subespacio cerrado y separable X de X', por la Proposición 37 y la Proposición 38 se puede suponer que K solo está formado de funciones de valor real y por la Proposición 33 se puede suponer que $diam(K) = 1$.

Se considera $(K)_{\mathscr{U}}$ subconjunto de $(X)_{\mathscr{U}}$ que a su ves es un subconjunto de $(L_1(P))_{\mathscr{U}}$ y $(T)_{\mathscr{U}}$ visto como operador de $(K)_{\mathscr{U}}$ en si mismo.

De la Proposición 16 se sigue que $(K)_{\mathscr{U}}$ es convexo, cerrado y $diam((K)_{\mathscr{U}}) = 1$, además por la Proposición 17 el operador $(T)_{\mathscr{U}}$ es no expansivo.

Puesto que K es ω-compacto, entonces por el Teorema de Dunford-Pettis, el Teorema 10 y la Proposición 21, se tiene que $(K)_{\mathscr{U}}$ es un subconjunto de $L_1(\widetilde{P})$, donde $\widetilde{P}$ es la ultrapotencia de la probabilidad P respecto a $\mathscr{U}$ cuya existencia se garantiza en la Proposición 11.

Del párrafo anterior se sigue que tiene sentido escribir $\widetilde{K} = (K)_{\mathscr{U}}$ y $\widetilde{T} = (T)_{\mathscr{U}}$.

Sea $\widetilde{x} = \widetilde{(x_n)} \in \widetilde{K}$ un punto fijo para $\widetilde{T}$ con (x_n) una a.f.p.s. para T, la prueba se encuentra en la Proposición 35.

Luego por la Proposición 37, existen U y V medibles respecto a P tales que $\lim\limits_{n,\mathscr{U}} E(|x_n - U| \wedge |x_n - V|) = 0$ para una colección numerable de a.f.p.s. (x_n) en K, entonces se afirma que existen funciones $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$ definidas en $\widetilde{\Omega} = (\Omega)_{\mathscr{U}}$, medibles respecto a $\widetilde{P}$ y tales que $|\widetilde{x} - \widetilde{U}| \wedge |\widetilde{x} - \widetilde{V}| = 0$ para toda colección numerable de $\widetilde{x} \in \widetilde{K}$ tales que tienen un representante (x_n) que es una a.f.p.s. para T.

Para dar prueba de la afirmación del párrafo anterior, para cada $\widetilde{\omega} = \widetilde{(\omega_n)} \in \widetilde{\Omega}$ se definen $\widetilde{U}(\widetilde{\omega}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} U(\omega_n)$ y $\widetilde{V}(\widetilde{\omega}) = \lim\limits_{\mathscr{U}} V(\omega_n)$, por el Corolario 2, las funciones $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$ están bien definidas y son $\widetilde{P}$-medibles, además por el Teorema 10 y la Proposición 22, se tiene que para cada (x_n) a.f.p.s., la proyección $\widetilde{x}$ de $\widetilde{(x_n)} \in (L_1(P))_{\mathscr{U}}$ en el espacio $L_1(\widetilde{P})$ satisface $\widetilde{x}(\widetilde{(\omega_n)}) = \lim_{\mathscr{U}} x_n(\omega_n)$ para cada $\widetilde{(\omega_n)} \in (\Omega)_{\mathscr{U}}$.

Luego del Teorema 10, la Proposición 22 y el Corolario 2, se sigue que $\int \widetilde{(|x_n - U| \wedge |x_n - V|)} \, \mathrm{d}\widetilde{P} = \int (\lim_{\mathscr{U}} |x_n(\omega_n) - U(\omega_n)| \wedge |x_n(\omega_n) - V(\omega_n)|) \, \mathrm{d}\widetilde{P}$ $= \lim_{\mathscr{U}} \int (|x_n - U| \wedge |x_n - V|) \, \mathrm{d}P = \lim_{\mathscr{U}} E(|x_n - U| \wedge |x_n - V|) = 0$, de donde $|\widetilde{x} - \widetilde{U}| \wedge |\widetilde{x} - \widetilde{V}| = |\lim_{\mathscr{U}} x_n(\omega_n) - \lim_{\mathscr{U}} U(\omega_n)| \wedge |\lim_{\mathscr{U}} x_n(\omega_n) - \lim_{\mathscr{U}} V(\omega_n)| = \lim_{\mathscr{U}} |x_n(\omega_n) - U(\omega_n)| \wedge |x_n(\omega_n) - V(\omega_n)| = 0$ $\widetilde{P}$-c.s. para toda colección numerable de elementos $\widetilde{x}$ en $(L_1(P))_{\mathscr{U}}$ de tal modo que tienen un representante que es una a.f.p.s.

Si $\widetilde{x}$ y $\widetilde{y}$ son dos elementos en $(L_1(P))_{\mathscr{U}}$ que tienen un representante que es una a.f.p.s., entonces por lo demostrado en los párrafos precedentes, si se consideran para la construcción de $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$ se observa que existen $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{\sigma}$ tales que $\widetilde{x} = \chi_{\widetilde{A}} \widetilde{U} + \chi_{\widetilde{A}^c} \widetilde{V}$ y $\widetilde{y} = \chi_{\widetilde{B}} \widetilde{U} + \chi_{\widetilde{B}^c} \widetilde{V}$, por lo tanto $\widetilde{x} - \widetilde{y} = (\chi_{\widetilde{A}} - \chi_{\widetilde{B}}) \widetilde{U} - (\chi_{\widetilde{B}^c} - \chi_{\widetilde{A}^c}) \widetilde{V}$, es un resultado que conocido que $\chi_{\widetilde{A}} - \chi_{\widetilde{B}} = \chi_{\widetilde{B}^c} - \chi_{\widetilde{A}^c}$, luego $|\widetilde{x} - \widetilde{y}| = |\chi_{\widetilde{A}} - \chi_{\widetilde{B}}||\widetilde{U} - \widetilde{V}|$, de donde $\widetilde{C} = \widetilde{A} \triangle \widetilde{B}$ satisface $|\widetilde{x} - \widetilde{y}| = \chi_{\widetilde{C}} |\widetilde{U} - \widetilde{V}|$.

Continuando con el párrafo anterior, se observa que en el conjunto $\{\widetilde{U} = \widetilde{V}\}$ se tiene $|\widetilde{x} - \widetilde{y}| = \chi_{\widetilde{C}} |\widetilde{U} - \widetilde{V}| = 0$, de donde se puede sustituir sin pérdida de generalidad $\widetilde{C}$ por $\widetilde{B} = \widetilde{C} \cap \{\widetilde{U} = \widetilde{V}\}$, es decir, $|\widetilde{x} - \widetilde{y}| = \chi_{\widetilde{B}} |\widetilde{U} - \widetilde{V}|$ $\widetilde{P}$-c.s.

Por la Proposición 36, en particular la demostración del inciso 2) en la que se afirma que $Fix(\widetilde{T})$ es diametral, dado un elemento $\widetilde{x} \in Fix(\widetilde{T})$ que tiene un representante que es una a.f.p.s., existe otro elemento $\widetilde{y} \in Fix(\widetilde{T})$ que tiene un representante que es una a.f.p.s. de tal modo que $\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| = diam \widetilde{K} = 1$.

De la Proposición 36, prueba del inciso 3) donde se demuestra que $Fix(\widetilde{T})$ es métricamente convexo, se sigue que dados dos elementos $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in Fix(\widetilde{T})$, existe un elemento $\widetilde{z} \in Fix(\widetilde{T})$ con un representante que es un a.f.p.s., de tal modo que $\frac{1}{2}\|\widetilde{x} - \widetilde{u}\| = \|\widetilde{x} - \widetilde{z}\|$ $= \|\widetilde{y} - \widetilde{z}\|$.

Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, se pueden escoger dos elementos $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_n \in Fix(\widetilde{T})$ que tengan un representante que es una a.f.p.s. con $\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_0\| = 1$ y construir mediante el argumento del párrafo anterior $\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_{n-1} \in Fix(\widetilde{T})$ de tal modo que todos tienen un representante que es una a.f.p.s. y $\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_0\| = \sum_{k=1}^{n} \|\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}\|$

Se consideran las funciones $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$ generadas a partir de $\{\widetilde{x}_k \,|\, 0 \leq k \leq n\}$, entonces existen $\widetilde{C}, \widetilde{C}_k \in \widetilde{\sigma}$ para cada $1 \leq k \leq n$ de tal modo que $|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_0| = \chi_{\widetilde{C}}|\widetilde{U} - \widetilde{V}|$ y $|\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}| = \chi_{\widetilde{C}_k}|\widetilde{U} - \widetilde{V}|$ para cada $1 \leq K \leq n$.

Como $|\widetilde{x}_0 - \widetilde{x}_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}|$ $\widetilde{P}$-c.s., entonces dado que $\int |\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_0| \, \mathrm{d}\widetilde{P} = \|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_0\|$ $= \sum_{k=1}^{n} \|\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}\| = \sum_{k=1}^{n} \int |\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}| \, \mathrm{d}\widetilde{P}$, se sigue $|\widetilde{x}_0 - \widetilde{x}_n| = \sum_{k=1}^{n} |\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}|$ $\widetilde{P}$-c.s.
De donde $\chi_{\widetilde{C}_k}|\widetilde{U} - \widetilde{V}| = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\widetilde{C}_k}|\widetilde{U} - \widetilde{V}|$ $\widetilde{P}$-c.s., se observa que la igualdad anterior implica soportes ajenos de las respectivas funciones fuera del conjunto $\{\widetilde{U} = \widetilde{V}\}$, dado que los conjuntos $\widetilde{C}$ se pueden sustituir por $\widetilde{B} = \widetilde{C} \cap \{\widetilde{U} = \widetilde{V}\}$, entonces las funciones $\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}$ son ajenas por parejas para cada $1 \leq k \leq n$.

Se definen las funciones $\widetilde{z}_k = \frac{1}{\|\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}\|}(\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1})$ para cada $1 \leq k \leq n$, por tener soportes ajenos por parejas y estar normalizadas se tiene que para cualesquiera escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ se tiene que $\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \widetilde{z}_k\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$, es decir, $\{\widetilde{z}_k \,|\, 1 \leq k \leq n\}$ genera una copia isométrica e isomorfa de ℓ_1^n en $(X)_{\mathscr{U}}$, donde ℓ_1^n es $\mathbb{F}^n$ dotado de la norma $\|\cdot\|_1$, con $\mathbb{F}$ el campo de escalares.

Se ha probado que ℓ_1^n está encajado isométrica e isomorfamente en $(X)_{\mathscr{U}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego ℓ_1 es f.r. en $(X)_{\mathscr{U}}$, de donde, por el Lema 8 y el Corolario 3 se tiene que ℓ_1 es f.r. en X, lo cual contradice el hecho de que X es super reflexivo, Teorema 15.

Así X tiene la FPP. ∎

4.2. Recíproco

Por el Teorema de Maurey, Teorema 30, se sabe que todo subespacio reflexivo de $L_1(P)$ tiene la FPP, el siguiente resultado cuya prueba fue hecha por Dowling y Lennard en [21], asegura que si un subespacio de $L_1(P)$ tiene la FPP, entonces es reflexivo.

***Teorema* 31.** *Si X es un subespacio cerrado de $L_1(P)$ que tiene la FPP, entonces X reflexivo.*

Demostración: Por contrapositiva, si X no es reflexivo, entonces por el Teorema 29, X contiene una copia asintótica de ℓ_1, por lo tanto del Teorema 26 se sigue que X no tiene la FPP. ■

El resultado anterior junto con el Teorema de Maurey se engloban en el siguiente teorema.

***Teorema* 32.** *Sea X un subespacio cerrado de $L_1(P)$, entonces son equivalentes:*

1) X tiene la FPP

2) X es reflexivo

4.3. El espacio de Hardy H^1

El objetivo de la presente sección es mostrar otra aplicación de las técnicas utilizadas para demostrar el Teorema de Maurey, Teorema 30, en el contexto del espacio de Hardy H^1.

En adelante S^1 denotará la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$, la cual se considerará identificada con $\mathbb{T}$ el cociente de grupos aditivos ${}^{\mathbb{R}}/_{2\pi\mathbb{Z}}$, $\mathbb{D}$ la bola abierta de radio 1 en $\mathbb{C}$ y $A(\mathbb{D})$ la colección de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$, las definiciones dadas a continuación, así como la demostración de las propiedades que se enunciarán, se encuentran en [23, 38, 55].

Se enunciarán algunos resultados de Análisis Armónico referentes a las series de Fourier.

Dada una función $f \in L_1(S^1)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define su *n-ésimo coeficiente de Fourier* $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

Se puede probar que los coeficientes de Fourier asociados a una función en $L_1(S^1)$ son únicos, si (f_n) es una sucesión en $L_1(S^1)$ que converge en norma $\|\cdot\|_1$ a $f \in L_1(S^1)$, entonces las respectivas funciones $\widehat{f_n}$ de coeficientes de Fourier asociados a f_n para cada $n \in \mathbb{N}$, convergen uniformemente a la función $\widehat{f}$ de coeficientes de Fourier de f.

Se puede probar que los coeficientes de Fourier $\widehat{f}(n)$ de una función f tienden a 0 si $|n|$ crece, luego el operador T definido de $L_1(S^1)$ en c_0, la colección de sucesiones complejas que convergen a 0, que asocia a cada f sus coeficientes de Fourier, es un operador lineal acotado, más no sobreyectivo.

Para cada $f \in L_1(S^1)$ se define su *serie de Fourier* $S[f] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, su *n-ésima suma parcial de Fourier* $S_n[f] = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ik\theta}$. En subespacios de $L_1(S^1)$ se pueden dar condiciones para que $\|S_n[f] - f\|_1 \to 0$ si $n \to \infty$.

Un *kernel sumable* es una sucesión (k_n) de funciones de valor complejo con dominio S^1 tales que:

1) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} k_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

2) Existe $M > 0$ tal que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |k_n(\theta)|\,\mathrm{d}\theta \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$

3) Para todo $0 < \delta < \pi$ se tiene que $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(\theta)|\,\mathrm{d}\theta = 0$

En la definición anterior se pueden considerar en lugar de sucesiones, familias indizadas por un parámetro r y solo ajustar la condición 3), por ejemplo, si $0 < r < 1$, entonces en 3) se puede considerar el límite cuando $r \to 1$.

Para todo kernel sumable (k_n) y función $f \in L_1(S^1)$ se satisface

$$f(\theta) = \lim_{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(\tau)f(\theta - \tau)\,\mathrm{d}\tau$$

donde el límite se calcula respecto a la norma $\|\cdot\|_1$.

Un kernel sumable que será usado es el *kernel de Fejer* (K_n), definido mediante $K_n(\theta) = \sum_{j=-n}^{n} (1 - \frac{|j|}{n+1})e^{ij\theta}$. El kernel de Fejer, para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene asociado un *Operador* o *Suma de Fejer* σ_n, dado por $\sigma_n(f) = \sum_{j=-n}^{n} (1 - \frac{|j|}{n+1})\widehat{f}(j)e^{ij\theta}$ para cada

$f \in L_1(S^1)$.

El Operador de Fejer es un operador lineal acotado con norma no mayor a 1 de $L_1(S^1)$ en si mismo y $\|\sigma_n(f) - f\|_1 \to 0$ si $n \to \infty$ para todo $f \in L_1(S^1)$, más aún, el Operador de Fejer está definido de $L_p(S^1)$ en si mismo y satisface las mismas propiedades.

Otro kernel sumable es el llamado *núcleo de Poisson*, el cual está definido para cada $0 < r < 1$ mediante $P(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}$, éste kernel tiene asociado un operador llamado *integral de Poisson*, la cual a cada $f \in L_1(S^1)$ le asocia la función $f(r,\theta) = f_r(\theta)$ $= \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{in\theta}$ y satisface que $f_r(\cdot)$ converge a $f(\cdot)$ en norma $\|\cdot\|_1$ cuando $r \to 1$.

Se recuerda que para cada $0 < p < 1$, el espacio $L_p(S^1)$ es la colección de funciones f de valor complejo definidas en S^1, tales que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \, \mathrm{d}\theta$, la cual tiene definida una distancia invariante bajo traslación $d(f,g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^p \, \mathrm{d}\theta$.

Dada $f \in L_1(S^1)$, tal que f tiene serie de Fourier $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta}$, entonces la transformación P expresada formalmente como $P(f) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta}$, es de hecho un operador bien definido de $L_1(S^1)$ en $L_p(S^1)$ para todo $0 < p < 1$ y es continuo, es decir existe un $g \in L_p(S^1)$ de tal modo que se le puede calcular su serie de Fourier y es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{in\theta}$.

En adelante se definirá el espacio de Hardy y su relación con las series de Fourier.

Dado $0 < r < 1$ fijo, para cada $f \in A(\mathbb{D})$ se define $M(r,f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta$. El *espacio de Hardy* H^1 se define como la colección de funciones $f \in A(\mathbb{D})$ tales que $M(f) = \lim\limits_{r \to 1^-} M(r,f)$ existe.

El conjunto H^1 es un espacio vectorial y la función $M(\cdot, f)$ es una función monótona creciente para cada $f \in H^1$ y $M(f)$ es de hecho una norma en H^1 respecto a la cual es un espacio de Banach.

Se puede demostrar que para cada $f \in H^1$, existe su límite radial $\widetilde{f}(\theta) = f(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ c.s., además $\widetilde{f}$ es una función en $L_1(S^1)$ y $M(f) = \|\widetilde{f}\|_1$.

El operador que a cada función en $f \in H^1$ le asocia su límite radial $\widetilde{f}$, es lineal, luego por el párrafo anterior es un encaje isométrico de H^1 en $L_1(S^1)$, en adelante se considerará indistintamente el espacio de Hardy H^1 como subespacio de $L_1(S^1)$ identificándolo con su imagen bajo el operador que asocia límites radiales.

Si una función f pertenece al espacio de Hardy H^1, entonces es igual a la integral de Poisson de su límite radial g, en símbolos, $f(re^{i\theta}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\widehat{g}(n)e^{in\theta}$, más aún, $f \in H^1$ si y solo si existe $g \in L_1(S^1)$ de tal modo que la integral de Poisson de g es f y $\widehat{g}(n) = 0$ para todo $n < 0$.

Del párrafo anterior se sigue que las funciones f en el espacio de Hardy H^1, admiten una expansión en serie de tal modo que $f(\theta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{in\theta}$.

Por último, un espacio de Banach X se dirá que tiene la *propiedad de Schur* si la ω-convergencia sucesional implica la convergencia fuerte sucesional, un ejemplo de un espacio con la propiedad de Schur es ℓ_1, ver [50].

Es un resultado conocido que el espacio de Hardy H^1 no es reflexivo, la prueba de esta afirmación así como la caracterización de un predual y el dual del espacio de Hardy H^1 se encuentra en [16, 26, 59], cabe mencionar que el espacio de Hardy H^1 es de los pocos ejemplos conocidos de espacios separables que no son reflexivos además de los usuales como son $c_0, \ell_1, L_1[0,1]$ y $C[0,1]$.

***Teorema* 33.** *El espacio de Hardy H^1 no es reflexivo.*

Dado que el espacio de Hardy H^1 es un subespacio cerrado de $L_1(S^1)$ y no es reflexivo, entonces por el Teorema 32 se tiene que no posee la FPP, sin embargo, el espacio de Hardy H^1 si posee la ω-FPP, por lo que es un ejemplo de un espacio sin la FPP y que si tiene la ω-FPP, lo anterior se resume en el siguiente teorema.

***Teorema* 34.** *El espacio de Hardy H^1 no tiene la FPP y si tiene la ω-FPP.*

Demostración: La demostración de que H^1 no posee la FPP es consecuencia inmediata de los Teoremas 32 y 33

Para la demostración de que H^1 tiene la ω-FPP se procede por contradicción.

Se supone que H^1 no cumple la ω-FPP, entonces empleando exactamente los mismos argumentos que se mencionaron en los primeros párrafos de la demostración del Teorema de Maurey, Teorema 30, se tiene que existen un conjunto K convexo, ω-compacto no trivial, reflexivo, minimal para un operador T no expansivo definido de K en si mismo, una función G medible en S^1 con $|G(\theta)| = 1$ c.s. y una $f_0 \in K$ tales que $(f - f_0)G$ es de valor real para todo $f \in K$, además se puede suponer que $diam(K) = 1$ y que $f_0 = 0$, por lo tanto fG es de valor real para todo $f \in K$.

Se considera el conjunto $C = \{fG \,|\, f \in K\}$ el cual es convexo por la Proposición 38, se afirma que es un subconjunto ω-compacto de $L_1(S^1, \mathbb{R})$, el subespacio de $L_1(S^1)$ conformado por las funciones de valor real, para demostrarlo basta probar que el operador R de $L_1(S^1)$ en $L_1(S^1)$ definido mediante $Rf = fG$ es $\omega - \omega$ continuo.

Lo anterior se sigue de observar que R es un operador lineal acotado, luego como todo operador lineal acotado es $\omega - \omega$ continuo, se concluye que R es $\omega - \omega$ continuo, así C es ω-compacto. Además ya que R es biyectivo por el Teorema de la función abierta, R es un homeomorfismo respecto a la norma, por lo tanto de la linealidad se sigue que también es un $\omega - \omega$ homeomorfismo, con inversa $R^{-1}f = fG^{-1} = f\overline{G}$.

Se probará que el conjunto C tiene la propiedad de Schur, bajo subsucesiones, dado que C es ω-compacto y la traslación de ω-compactos es un ω-compacto, entonces basta probar que toda sucesión ω-convergente a 0 es convergente respecto la norma a 0.

Sea (f_n) una sucesión en C que ω-converge a 0, entonces la sucesión $(f_n\overline{G})$ está en K y puesto que R es un $\omega - \omega$ homeomorfismo, entonces $(f_n\overline{G})$ ω-converge a 0 en K, ya que el operador que asocia a cada elemento en H^1 sus coeficientes de Fourier es un encaje de H^1 en c_0, entonces es $\omega - \omega$ continuo y ya que en c_0 la ω-convergencia es la convergencia puntual, entonces los coeficientes de Fourier asociados a los elementos $f_n\overline{G}$ convergen a 0 para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por el párrafo anterior, pasando si fuese necesario por una subsucesión, se puede suponer para cada $n \in \mathbb{N}$ que $f_n\overline{G}$ en su expansión en serie de Fourier solo tiene términos con índice mayor n más un error que tiende a 0 en $\|\cdot\|_1$, es decir $f_n\overline{G} = e^{in\theta}b_n + c_n$ con $b_n \in H^1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n} \|c_n\|_1 = 0$.

Para demostrar la afirmación del párrafo anterior se utilizará una técnica de Sliding Hump, para $k = 0$ se toma $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widehat{f_n}(1) < \frac{1}{2^{0+1}}$ para todo $n \geq N_1$, se llaman $e^{i0\theta}b_0 = f_{N_0} - \sum_{n=0}^{0}\widehat{f}_{N_0}(n)e^{in\theta}$ y $c_0 = \sum_{n=0}^{0}\widehat{f}_{N_0}(n)e^{in\theta}$, se suponen $b_0, \cdots, b_{k-1}$ y $c_0, \cdots, c_{k-1}$ construidos, entonces se toma $N_k \in \mathbb{N}$ de tal modo que $N_k > N_j$ y $f_n(j) < \frac{1}{2^{j+k+1}}$ para todo $0 \leq j < k$ y $n \geq N_k$, luego se definen $e^{ik\theta}b_k = f_{N_k} - \sum_{n=0}^{k}\widehat{f}_{N_k}(n)e^{ik\theta}$ y $c_k = \sum_{n=0}^{k}\widehat{f}_{N_k}(n)e^{ik\theta}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ se observa que $b_k \in H^1$ y que $\|c_k\|_1 \leq \sum_{n=0}^{k}\|\widehat{f}_{N_k}(n)e^{ik\theta}\|_1 \leq \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}$ $\leq \frac{1}{2^k}$ lo cual tiende a 0 si n tiende a ∞.

Dado que (f_n) es uniformemente integrable, se tiene que $(f_n\overline{G})$ también lo es, entonces como $\lim\limits_{n}\|c_n\|_1 = 0$ se sigue que (b_n) es uniformemente integrable.

Ya que f_n es de valor real para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $f_n = e^{in\theta}b_nG + c_nG$ $= e^{-in\theta}\overline{b_nG} + \overline{c_n}\overline{G}$, por lo tanto $b_n = e^{-2in\theta}\overline{b_n}\,\overline{G}^2 + r_n$, donde $r_n = c_ne^{-in\theta}(\overline{G}^2 - 1)$. Se observa que $\lim\limits_{n}\|r_n\|_1 = 0$ ya que $\lim\limits_{n}\|c_n\|_1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera el Operador de Fejer σ_n visto como operador de $L_p(S^1)$ en si mismo para todo $p \geq 1$ y se define $L_n = \overline{G}^2 - \sigma_{n-1}(\overline{G}^2)$, dado que $\|\sigma_n\| \leq 1$, entonces $\|\sigma_{n-1}(\overline{G}^2)\|_p \leq \|\overline{G}^2\|_p = 1$ para todo $p \geq 1$, y ya que $1 = \|\overline{G}^2\|_\infty$ $= \|\sigma_{n-1}(\overline{G}^2) + L_n\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty}\|\sigma_{n-1}(\overline{G}^2) + L_n\|_p \geq \lim\limits_{p\to\infty}|\|\sigma_{n-1}(\overline{G}^2)\|_p - \|L_n\|_p|$, se tiene que $\|L_n\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty}\|L_n\|_p \leq 2$, además por las propiedades del Operador de Fejer se tiene que $\lim\limits_{n}\|L_n\|_p = 0$ para todo $p \geq 1$.

Del párrafo anterior se infiere que (L_n) converge a 0 en medida.

Se considera el operador P, definido al principio de la presente sección, que transforma cada elemento de $L_1(S^1)$ en uno de $L_p(S^1)$ para $0 < p < 1$, de tal modo que sus coeficientes de Fourier negativos son 0 y los demás coeficientes los deja igual, luego como $e^{-2in\theta}\sigma_{n-1}(\overline{G}^2)\overline{b}_n$ tiene coeficientes de Fourier no negativos iguales a 0, se tiene que $P(e^{-2in\theta}\sigma_{n-1}(\overline{G}^2)\overline{b}_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} b_n &= P(b_n) = P(e^{-2in\theta}\overline{b_n}\,\overline{G}^2 + r_n) \\ &= P(e^{-2in\theta}\overline{b_n}(\sigma_{n-1}(\overline{G}^2) + L_n) + r_n) = P(e^{-2in\theta}L_n\overline{b_n} + r_n) \end{aligned}$$

De donde $b_n \in L_p(S^1)$ para todo $0 < p < 1$.

Ya que (b_n) es uniformemente integrable, entonces $(\bar{b}_n)$ también lo es, luego como (L_n) converge a 0 en medida y $\|L_n\| \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lim_n \|L_n\bar{b}_n\|_1 = 0$, luego $(e^{-2in\theta}L_n\overline{b_n} + r_n)$ converge a 0 respecto a $\|\cdot\|_1$.

Así de la continuidad de P se sigue que para cada $0 < p < 1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|b_n\|_p = 0$, por lo tanto ya que (b_n) es uniformemente integrable se sigue que $\lim_{n\to\infty} \|b_n\|_1 = 0$, de donde $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$.

Se concluye que C es compacto respecto a la norma, de donde K es compacto respecto a la norma por ser R un homeomorfismo respecto a la norma, lo cual es una contradicción, ya que si K es compacto, por la Proposición 32, existe una a.f.p.s. en K a la cual se le puede extraer una subsucesión que converge a un punto fijo en K, lo que es una contradicción.

Se concluye que H^1 tiene la ω-FPP. $\blacksquare$

Bibliografía

[1] Albiac F., Kalton N. J., *Topics in Banach Space Theory*, Springer-Verlag, Berlín, 2006.

[2] Alspach D. E., *A fixed poind free nonexpansive map* Proc. AMS. número 82, 1981, pp. 423-424.

[3] Balder E. J., *An Extension of Prohorov's Theorem for Transition Probabilities with applications to Infinite-Dimensional Lower Closure Problems*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, série 2, tomo 34, 1985, pp. 427-447.

[4] Balder E. J., *On weak convergence implying strong convergence in L_1-Spaces*, Bull. Austral. Math. Soc., número 33, 1986, pp. 363-368.

[5] Banach, S., *Sur lés opérations dan les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales*, Fund. Math. vol. 4, 1922.

[6] Bauschke H. H., Burachik R. S., Combettes P. L., Elser V., Luke D. R. y Wolkowicz H. (eds.), *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, Springer Optimization and its Applications, número 49, 2011.

[7] Benyamini Y. y Lindenstrauss J., *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Colloquium Publications AMS., volumen 48, número 1, Estados Unidos, 2000.

[8] Birkhoff G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, New York, 1948.

[9] Blackadar B., *Operator Algebras, Theory of C^*-Algebras and Von Neumann Algebras*, University of Nevada, 2013.

[10] Border K. C., *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, Cambridge University Press, 1985.

[11] Brouwer L. E. J., *Aber Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Periodical issue Mathematische Annalen, vol. 71, 1910, pp. 97 – 115.

[12] Browder F. E., *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., número 53, 1965, pp. 1272-1276.

[13] Carl S. y Heikkilä S., *Fixed Point Theory in Ordered Sets and Applications, from Differential and Integral Equations to Game Theory*, Springer, 2011.

[14] Castaing C. y Valadier M., Dold A. y Eckmann (Eds.), *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag, Berlín, 1977.

[15] Chang C. C. y Keisler H. J., *Model Theory*, segunda edición, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[16] Coifman R. R. y Weiss G., *Extensions of Hardy spaces and their use in Analysis*, Bulletin of the AMS, volumen 83, número 4, 1977.

[17] Conway B. J., *A Course in Functional Analysis*, segunda edición, Springer-Verlag, Berlín, 1990.

[18] Dacunha-Castelle, D. y Krivine J. L., *Applications des ultraproduits a l'etude des espaces et des algebres de Banach*, Studia Math, vol. 41, 1972, pp. 315 – 334.

[19] Diestel j. y Uhl Jr. J. J., *Vector Measures*, American Mathematical Society, New York, 1977.

[20] Dilworth S. J., Girardi M. y Hagler J., *Dual Banach Spaces which contain an isometric copy of L_1*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., número 48, 2000, pp. 1-12.

[21] Dowling P. N. y Lennard C. J., *Every nonreflexive subespace of $L_1[0,1]$ fails the fixed point property*, Proc. Amer. Math. Soc., número 125, 1997, pp. 443-446.

[22] Dowling P. N., Lennard C. J. y Turett B., *Asymptotically perturbed norms of classical sequence spaces with applications to fixed point theory*, Proceedings of Workshop of Fixed Point Theory, volumen 51 de Ann. Univ. Mariae curie-Sklodoska Sect. A, 1997, pp. 67-98.

[23] Duren P. y Schuster A., *Bergman Spaces*. Mathematical Surveys and Monographs AMS., volumen 100, Estados Unidos, 2004.

[24] Elton J., Lin Pei-Kee, Odell E. y Szarek S., *Remarks on the Fixed Point Problem for Nonexpansive Maps*, Contemporary Mathematics AMS., volumen 18, 1983, pp. 87-120.

[25] Facenda Aguirre J. A., *Geometría de Espacios de Banach*, Universidad de Sevilla, España, 1998.

[26] Fefferman C. y Stein E. M., *H^p Spaces of Several Variables*, Acta Mathematica, número 29, Estados Unidos, 1972.

[27] Franklin J. N., *Methods of Mathematical Economics, Linear and Nonlinear Programming, Fixed-Point Theorems*, Classics in Applied Mathematics SIAM, número 37, 2002.

[28] García Falset. J., *Operadores no lineales: Una introducción a la teoría métrica del punto fijo y a la acerbidad*, REPROEXPRES, Valencia, España, 2010.

[29] Goebel K. y Kirk W. A., *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press, 1990.

[30] Goldblatt, R. *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis*, Springer, Amsterdam, 1998.

[31] Göhde D., *Zum Prinzip der kontraktiven abbildung*, Math. Nachr. número 30, 1965, pp. 251-258.

[32] Guerre D. S., *Classical Sequences in Banach Spaces*, Marcel Dekker, Nueva York, 1992.

[33] Hagler J., *Embeddings of L_1 into conjugate Banach spaces*, Tesis doctoral, University of California, Berkeley, California, 1972.

[34] Hagler J., *Some more Banach spaces containing ℓ_1*, Studia Math., número 46, 1973, pp. 35-42.

[35] Heinrich S., *Ultraproducts in Banach space theory*, J. Reine and Ang. Mat., 1980, pp.72 -104. Berlin; 1826

[36] Hinrichsen D. y Fernández Muñiz J. L., *Topología General*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2003.

[37] James R. C., *Super-Reflexive Spaces with Bases*, Pac. J. Math., 41-2, 1972, pp. 409-419.

[38] Katznelson Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, tercera edición, Cambridge Mathematical Library, Londres 2004.

[39] Khamsi M. A., *On the weak*-fixed point property*, Contemp. Math. AMS., número 85, 1989, pp. 325-334.

[40] Kirk W. A., *Fixed point theorems in product spaces, operator equations and fixed points*, Math. Sci. Inst. Korea, número 1, 1986, 27-35.

[41] Kirk W. A., *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, número 72, 1965, pp. 1004-1006.

[42] Kirk W. A. y Sims B. (Eds.), *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluert Svsfrmiv Punlidhrtd, 2001.

[43] Kupka J., *The Carathéodory Extension Theorem for Vector Valued Measures*, Proc. AMS., Vol, 72, Num. 1, 1978.

[44] Lacey H. E., *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[45] Lawrence C. E., *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, Conference Board of the Mathematical Sciences AMS., 1988.

[46] Lin P. K., *There is an equivalent norm on ℓ_1 that has the fixed point property*, Nonlinear Anal. 68, número 8, 2008, pp. 2303-2308.

[47] Lindenstrauss J. y Tzafriri L., *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlín, 1977.

[48] Lindenstrauss J. y Tzafriri L., *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlín, 1979.

[49] Luxenberg, W. A. J. *A general theory of monads*, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1969. pp. 18-85.

[50] Megginson R. B., *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, Berlín, 1998.

[51] Munkres J. R., *Topology*, segunda edición, Pearson Education, New Yersey, 2000.

[52] Maurey B., *Points Fixes des Contractions de Certain Faiblement Compacts de L^1*, Seminaire d' Analyse Fonctionnelle, École Polytechnique, 1980-1981.

[53] Reich S. y Shoikhet D., *Nonlinear Semigroups, Fixed Points, and Geometry of Domains in Banach Spaces*, Imperial College Press, 2005.

[54] Rudin W., *Functional Analysis*, segunda edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1971.

[55] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, tercera edición, McGraw-Hill, Nueva York, 1987.

[56] Salicrup G., Rosenblueth J. Ed., Prieto, C. Ed., *Introducción a la Topología*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 1997.

[57] Urai K. *Fixed Points and Economic Equilibria*, Series onf Mathematical Economics and Game Theory, volumen 5, Worl Scientific, 2010.

[58] Valadier M., *A course on Young Measures*, Workshop di Teoria della Misura e Analisi Reale, Grado Italia, 1993.

[59] Weisz F., *Martingale Hardy spaces, BMO and VMO spaces with nonlinearly ordered stochastic basis*, Analysis Mathematica, número 16, 1990, pp. 227-239.

[60] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems* Springer-Verlag, Berlín, 1986.