CAPÍTULO 8

EL IMPACTO DE LA NOCIÓN DE 'SISTEMA LÓGICO' EN LA ENSEÑANZA DE LA LÓGICA[1]

Teresita Mijangos Martínez
UNSIS, Oaxaca
teresita_mm@hotmail.com

La llamada "lógica clásica" nació en el ámbito matemático. Es importante que recordemos este aspecto ya que nos ubica en el contexto en el que han de interpretarse varios de sus elementos. La importancia de las matemáticas en la lógica no sólo se restringe a la lógica clásica, la herramienta matemática permea la lógica formal actual y hacer caso omiso de tal influencia puede provocar que algunas partes de los sistemas actuales no sean comprendidos en su justa dimensión.

Tomemos como ejemplo a las llamadas "tablas de verdad". Si en su enseñanza omitimos la noción matemática de función que está detrás, la comprensión del rol que juegan tales tablas es malinterpretada. Las "tablas de verdad" constituyen las definiciones de los conectivos a usar dentro de un sistema lógico. Estas definiciones son estipulativas, ya que introducen la interpretación de los conectivos lógicos. Como definiciones estipulativas, la interpretación que se les dio en el sistema pudo haber sido distinta, no obstante, una vez que se definen de cierta forma los conectivos en un sistema, tales definiciones han de permanecer constantes. En otras palabras, las definiciones de conectivos se "fijan" dentro del sistema. La noción matemática de "función" nos permite darnos cuenta de tal carácter estipulativo de

[1] Una versión previa de este trabajo fue presentada en el X Encuentro Internacional de Didáctica de la Lógica, realizado del 10 al 14 de noviembre de 2007 en la UAS Campus Mazatlán, México.

las tablas de verdad, gracias a que la función únicamente requiere que a cada elemento del dominio se le asigne a lo más un sólo elemento del codominio. No obstante, el mapeo pudo haber sido distinto y ello estar relacionado con una función distinta que describa o defina ciertas relaciones entre ciertos “objetos” de una forma distinta.

En la lógica clásica la función conjunción se define por el mínimo valor de un par de valores dado, es decir, $\wedge(x,y) = min\ (x,y)$. Gráficamente representamos el mapeo así:

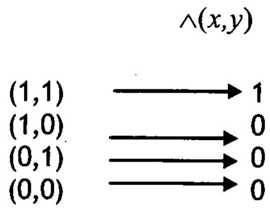

Figura 1. Definición de conjunción.

No obstante, los mapeos de las figuras 2 y 3 también son funciones y *en principio* pudieron haberse escogido para definiciones de conjunción de un sistema clásico.

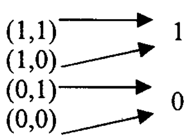

Figura 2

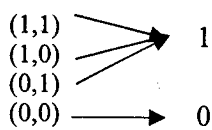

Figura 3

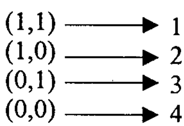

Figura 4

Sin embargo, el mapeo descrito en la figura 4, no podría seleccionarse como una posible definición de conjunción, por el supuesto de bivalencia que tienen los sistemas clásicos.[2]

En la experiencia que he adquirido al observar algunos cursos de lógica en México, específicamente en el área de filosofía, he notado que regularmente no se explica al alumno la noción de función detrás de la asignación de valores que se hacen en la tabla. El alumno en general memoriza esas tablas sin plantearse la pregunta de si la conjunción por ejemplo, en lugar de tener valor "verdadero" o "1" cuando ambos conyuntos tienen tal valor podría tener valor "falso" o "0" como hemos ejemplificado anteriormente.

La "justificación" que se da regularmente se traslada al lenguaje ordinario. El profesor o profesora da ejemplos de enunciados unidos por una "y" para explicar por qué es más plausible que sean verdaderos tales enunciados compuestos en algunos casos (los de la tabla) y no en otros. No obstante, ni se aclara que tal "y" es una "y" lógica que en muchas ocasiones no cumple los requisitos de la "y" del español ni tampoco se ilustra que tal asignación como definición en un sistema pudo haber sido distinta y que podemos construir un sistema de lógica tal en donde la "y" sea definida de otra forma. Sin embargo, esta visión de cambio sólo nos la dará la comprensión de los conectivos lógicos proposicionales como "funciones de verdad" o quizás más preciso como "funciones de asignación de valores".[3]

---

[2] Hay que aclarar que ciertos conectivos se definen de acuerdo a ciertas propiedades que se quieren respetar u obtener de un sistema. Por lo que aunque en principio podría escogerse cualquier asignación para definir a cierto conectivo, en este caso conjunción, tal asignación no es tan arbitraria como podría pensarse en un primer momento.

[3] Los valores no necesariamente tienen que ser valores de verdad. Obsérvese arriba que en lugar de los valores "V" o "F" ("verdadero" o "falso") usamos números. También pudimos usar objetos, el punto es que la relación establecida entre los elementos del dominio y el rango sea una función.

No voy a entrar en más detalles con respecto a la noción de función. Este ejemplo introductorio pretendía únicamente ilustrar que la lógica proposicional clásica ha de entenderse dentro de su contexto matemático, en este caso, el concepto de función proveniente de las matemáticas es importante para una comprensión cabal de las definiciones de conectivos en la lógica proposicional clásica.

Lo que nos interesa en este escrito se relaciona con la noción de sistema lógico, la cual al igual que las tablas de verdad no es comprendida en su contexto primigenio (el matemático). Este defecto en la didáctica de la lógica se debe en parte a una gran gama de libros introductorios a la lógica que no hacen explícita tal noción. En el mejor de los casos, tales libros asumen la noción pero no la hacen explícita. En el peor, ni siquiera la asumen y ello se muestra en la estructura misma del libro. Mi crítica va específicamente en contra de estos últimos libros que desde mi punto de vista han contribuido a una visión reduccionista de la lógica.

II

Si al iniciar un curso de lógica se hiciera explícita la noción de sistema lógico, se facilitaría al estudiante de lógica una comprensión más integral del aprendizaje de tal disciplina.

Para explicar lo anteriormente mencionado, comenzaré por dar un acercamiento a lo que se llama comúnmente “sistema lógico”. Un sistema para considerarse lógico ha de tener como elementos los siguientes: 1. Un conjunto de símbolos primitivos; 2. Ciertas reglas de formación y 3. Ciertas reglas de transformación.

En el conjunto de símbolos primitivos se enumeran los símbolos formales del sistema. Estructuralmente hablando, esta lista es análoga al alfabeto de un lenguaje. Como ejemplo de qué símbolos primitivos pueden considerarse en un sistema veamos a Enderton (2004:31):

LÓGICA DE ENUNCIADOS 31

Tabla II

Símbolo	Nombre largo	Observaciones
(	paréntesis izquierdo	puntuación
)	paréntesis derecho	puntuación
$\neg$	símbolo de negación	español: no
$\wedge$	símbolo de conjunción	español: y
$\vee$	símbolo de disyunción	español: o (inclusivo)
$\rightarrow$	símbolo de condicional	español: si ___, entonces ___
$\leftrightarrow$	símbolo de bicondicional	español: si y sólo si
$\mathbf{A}_1$	primer símbolo de enunciado	
$\mathbf{A}_2$	segundo símbolo de enunciado	
...		
$\mathbf{A}_n$	enésimo símbolo de enunciado	
...		

Las reglas de formación por su parte, especifican cuáles secuencias de símbolos tienen sentido dentro del sistema. Es decir, qué secuencias son fórmulas bien formadas dentro del sistema. Como ejemplo, veamos la siguiente página de Enderton (2004:34):

Queremos definir las fórmulas como expresiones "gramaticalmente correctas"; las expresiones sin sentido habrán de ser excluidas. La definición tendrá las siguientes consecuencias:

(a) Todo símbolo de enunciado es una fórmula.

(b) Si α y β son fórmulas, entonces también lo son $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ y $(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

(c) Ninguna expresión es una fórmula a menos que (a) y (b) obliguen a ello.

Obsérvese la recursividad de las reglas ejemplificadas. Para formar fórmulas gramaticalmente correctas desde el punto de vista lógico se necesita asumir que todo símbolo proposicional (en este caso) es una fórmula[4] y, si tenemos fórmulas éstas se pueden unir mediante los conectivos que aparecen en (b) dándonos como resultado fórmulas bien formadas. Si por ejemplo, tenemos dos fórmulas como $(p \wedge q) \rightarrow r$ y $s \vee t$, con base en (b), $((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (s \vee t)$ sería una fórmula bien formada así como $\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$, $\neg (s \vee t)$, $((p \wedge q) \rightarrow r) \vee (s \vee t)$, $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (s \vee t)$, etc. A su vez estas fórmulas pueden combinarse con otras para generar fórmulas bien formadas más complejas.

La cláusula (c) nos indica que toda expresión que se considere fórmula (bien formada) cumplirá ya sea con (a) o con (b), de otra forma no serán fórmulas, es decir, estructuras gramaticalmente correctas dentro del sistema.

Las reglas de transformación establecen la forma de pasar de una secuencia de símbolos a otra. Específicamente indican cómo transformar ciertas fórmulas bien formadas en otras. Estas reglas dotan al sistema de la estructura de una teoría deductiva. Como ejemplos de reglas de transformación tenemos las reglas de inferencia (*modus ponendo ponens, modus tollendo tollens*, etc.).

Si el sistema lógico en cuestión es axiomático, además de contener los elementos ya mencionados tendrá un conjunto de axiomas.

La importancia de la noción de sistema lógico se muestra cuando tal noción es comprendida no teniendo una estructura fija, sino una estructura flexible cuyos elementos pueden modificarse. Así, tanto símbolos como reglas pueden modificarse y con ello dar pie a la creación de nuevos sistemas. Por ejemplo, dentro de las

[4] El aspecto de "bien formada" está implícito en (a), al exigirse que toda fórmula sea un enunciado proposicional.

reglas de formación se podría estipular en la cláusula (b) que si α y β son fórmulas también lo son $\Diamond\alpha$ y $\Diamond\beta$. Con esta modificación en las reglas de formación se estaría introduciendo vocabulario de una lógica que es extensión de la clásica, la lógica modal.

III

¿Cuáles podrían ser algunas consecuencias de no introducir la noción de sistema lógico? Quizás la principal es la de que se genera una comprensión inadecuada de la lógica. Por mucho tiempo se concibió a la lógica clásica como *la* lógica, sin cuestionar siquiera el carácter absoluto de los sistemas clásicos. La lógica así concebida era una estructura fija, estructura en todos los casos sobre reglas que cumplían siempre con un cierto conjunto de propiedades y sobre ciertos símbolos que repetían las mismas funciones bivalentes. No obstante, la posibilidad de modificar las propiedades del sistema así como las funciones veritativo-funcionales no se vislumbraba y, por ende, la función de modelaje de la lógica era casi nula. En la actualidad la noción de sistema se ha extendido al no reducir nociones como por ejemplo, "coherencia" o "racionalidad" a los criterios de los sistemas clásicos. Ello permite llamar "sistemas" a totalidades que modifican las reglas o símbolos de la lógica clásica. A su vez cierta ruptura con una noción de lógica como "descripción del mundo" ha permitido modificar las partes de los sistemas y crear alternativas lógicas, que no exclusivamente estén relacionadas con pensamientos ficticios. En nuestro mundo contemporáneo los sistemas lógicos son concebidos más como creaciones cuyas partes son escogidas conforme a ciertos intereses específicos, tales partes ya no tienen que cumplir con ciertas propiedades y restricciones impuestas a los sistemas clásicos. La lógica así, actualmente se ve como una creadora de modelos a partir de distintas realidades.

Como se mencionó en el párrafo anterior, la consecuencia principal de no entender la noción de sistema lógico es que cuando aprendamos cualquier sistema lógico no lo comprenderemos cabalmente. Podremos aprender a manejar adecuadamente algunas partes del sistema, por ejemplo, podremos escribir proposiciones con la gramática impuesta por ese sistema y manipular las relaciones entre tales proposiciones, pero de ser buenos ejecutantes de digamos, pruebas formales relacionadas con ese sistema no pasaremos. Desde esta perspectiva, nuestra capacidad creativa queda significativamente reducida. Para aclarar lo anterior, permítaseme mencionar un caso concreto: el libro de Irving Copi, *Introducción a la Lógica*. Situémonos en la parte en donde introduce la lógica simbólica, Copi (2003: 321 y ss.). El autor nos presenta las distintas tablas de verdad mencionándonos en qué casos la proposición compuesta ha de tener el valor "verdadero" o "falso". Nos menciona que los conectivos son veritativo funcionales, sin embargo, creo que la forma en que lo explica ha generado una interpretación de que los conectivos por ejemplo, la conjunción siempre debe asignársele valor "verdadero" sólo en el caso de que los dos conyuntos sean verdaderos, en otros casos es "falsa". Si bien la conjunción clásica es una función "fija" dentro de los sistemas clásicos, no se aclara que tal asignación compete sólo a cierto tipo de sistemas. Leamos un párrafo del libro mencionado en el que parece darse una explicación de por qué la conjunción es veritativo funcional.

> El valor de verdad de la conjunción de dos enunciados está determinado exclusiva y totalmente por los respectivos valores de verdad de sus componentes. Si ambos conyuntos son verdaderos, la conjunción es verdadera; en cualquier otro caso es falsa. Por ello, se dice que una conjunción es un enunciado compuesto *veritativo funcional* y sus conyuntos son sus componentes *veritativo funcionales*. Copi (2003: 324).

El primer enunciado afirma el carácter extensional de la lógica clásica. El valor de verdad de los enunciados compuestos dependerá exclusivamente de los valores que tengan los enunciados que los componen. Sin embargo, en esta afirmación no se establece el carácter funcional del conectivo ya que bien se podría asignar a un enunciado compuesto más de un valor de verdad, con lo cual se perdería el carácter de función (total).

En el segundo enunciado, el autor establece las condiciones en las cuales a una conjunción se le asignará el valor "verdadero" o "falso". No obstante, aquí tampoco aclara o recuerda al menos el carácter bivalente de la lógica clásica y el carácter excluyente de sus valores de verdad. En otras palabras, que los enunciados clásicos o serán verdaderos o falsos pero no podrán tener ambos valores ni tampoco carecer de ninguno de ellos. Así, que alguien podría pensar que cuando los valores de los conyuntos de la conjunción son "desconocido" el valor de la conjunción es falso. No obstante, en este segundo enunciado ya se introduce aunque no tan explícitamente la noción de enunciado, al mapear para la conjunción un par específico a un sólo valor y el resto a otro valor distinto al "verdadero".

El último enunciado menciona que los conyuntos son veritativo funcionales, sin embargo, si el carácter veritativo se asigna sólo cuando el enunciado es "verdadero" o "falso" (dado que en la lógica clásica no se aceptan otros valores) entonces tal requisito no se cumpliría en caso de pensar en los conyuntos con el valor "desconocido". En tal caso la conjunción podría ser una función pero no de valores de verdad.[5]

Desde mi punto de vista, Copi no presenta adecuadamente la definición de conjunción enmarcándola dentro de un sistema dado. Creo que la forma en que la presenta genera la idea de que no hay otra forma de definir la conjunción para cualquier sistema lógico, no sólo para el clásico.

[5] En contra de esta concepción podemos mencionar la conjunción en un sistema como Ł$_3$ de Łukasiewicz, en donde se considera a la conjunción como una función veritativo-funcional. En tal sistema no se trabaja bajo el supuesto de bivalencia que asume la lógica clásica, por lo que en el sistema se aceptan más de dos valores de verdad. *Cfr.*, Rescher (1993: cap. 1).

Otra crítica al libro introductorio de Copi es que no nos presenta las reglas de formación de las fórmulas bien formadas. El estudiante aprende por ejemplos e intuición cuáles fórmulas (proposiciones o enunciados en el caso de la lógica proposicional) están correctamente escritas. Ello no aclara al estudiante por qué han de escribirse así las fórmulas y no de otra manera, en otras palabras, parece una especie de imposición. Además, y desde mi punto de vista es lo más serio, impide que el estudiante proponga nuevos tipos de fórmulas, simplemente llega a considerar que tal como están escritas esas fórmulas se deben escribir todas las fórmulas de la lógica proposicional independientemente del sistema.[6]

Por último, las reglas de transformación también se presentan de una forma tal que dan la impresión de ser *las* reglas de cualquier lógica o sistema lógico. En ningún momento se expresa que son relativas a un sistema clásico específico.

La comprensión de lo que es un sistema lógico, de cómo funciona podría generar en principio mayor interés en los estudiantes de la disciplina iniciada por Aristóteles. No obstante, lo más importante para mí es que es una herramienta muy poderosa para estimular la creatividad en los estudiantes. Al saber por ejemplo, que los elementos de un sistema lógico son modificables y que en la mayoría de las ocasiones se introducen con la mira de obtener ciertas propiedades que nos ayuden a modelar algo, el alumno podría pensar en sistemas alternativos, buscar combinaciones posibles para construir distintos sistemas. De esta forma estaría explotando la capacidad de modelar de la lógica, es decir, la capacidad de la disciplina para simular a través de su lenguaje ciertas situaciones específicas. La lógica vista desde esta

[6] Este no es el caso para la lógica de la penalización (Penalty Logic) en donde una fórmula bien formada es un conjunto compuesto por un enunciado proposicional más un valor numérico. Pinkas (1995: 206).

perspectiva, es un lenguaje que como otros lenguajes nos permite tener una cierta interpretación de una cierta realidad.

Esta característica de la lógica de modelar es sumamente importante en cualquier disciplina teórica. En lógica tal aspecto se podría introducir mediante una enseñanza adecuada al menos de la lógica clásica. En este punto, los libros de texto juegan un rol muy importante. Muchos de ellos no hacen explícita y ni siquiera parecen suponer la noción de sistema. Ello genera un aprendizaje incorrecto de la lógica, un aprendizaje fragmentado, las partes de la disciplina no conforman una totalidad interrelacionada. Sin mencionar que a este aprendizaje fragmentado al interior de la disciplina, generalmente se suma una enseñanza aislada de la disciplina con respecto a otras áreas del conocimiento. Es muy importante entonces, que el profesor de lógica escoja adecuadamente los libros de texto que usará y, en caso de usar algún libro que no asuma la noción de sistema lógico, que él o ella la hagan explícita. Algunos libros que asumen la noción de sistema lógico son: Enderton (2004) y Mates (1972). Algunos libros populares aquí en México que no toman en cuenta la noción mencionada: Copi (1972, 1992 y 2003), Garrido (1997) y Suppes y Hill (2007).[7]

IV
Conclusión

El estudio integral de una disciplina es de suma importancia para el adecuado aprendizaje. La lógica es una disciplina que *grosso modo* se ha caracterizado por su coherencia. La enseñanza de esta disciplina en nuestro país (México) regularmente se aleja de la sistematicidad que caracteriza a la lógica, presentando al estudiante fragmentos de la disciplina que difícilmente parecen encajar

[7] La bibliografía que presento aquí de textos introductorias de lógica es para dar una noción general al lector sobre la cuestión de libros que introducen la noción de "sistema lógico" y cuáles no. No constituye un estudio exhaustivo de tales tipos de texto.

coherentemente en una totalidad. Ante tal circunstancia, el estudiante termina por memorizar algunos elementos y por familiarizarse con cierto conjunto de reglas que concibe como *las* reglas (es decir, como absolutas) sin siquiera imaginar que la riqueza de la disciplina va mucho más allá. El hacer explícita la noción de sistema lógico, generaría la crítica del estudiante en relación a la lógica así como su creatividad.

Bibliografía

Copi, Irving (1987). *Introducción a la Lógica*. Argentina: Eudeba. Colecc. Manuales.

Copi, Irving (2003). *Introducción a la Lógica*. México: Limusa.

Copi, Irving (1992). *Lógica Simbólica*. México: Compañía Editorial Continental.

Enderton, Herbert (1972). *A Mathematical Introduction to Logic*. New York: Academic Press.

Enderton, Herbert (2004). *Una Introducción Matemática a la Lógica*. 2ª. Ed. México: UNAM. Colecc. Filosofía Contemporánea.

Garrido, Manuel (ed.) (1989). *Lógica y Lenguaje*, Colecc. Cuadernos de Filosofía y Ensayo Madrid: Tecnos.

Garrido, Manuel (1997). *Lógica Simbólica*. Madrid: Tecnos.

Mates, Benson (1972). *Elementary Logic*. New Cork: Oxford University Press.

Pinkas, Gadi (1995). "Reasoning, Nonmonotonicity and Learning in Connectionist Networks that Capture Propositional Knowledge". *Artificial Intelligence* 77, pp. 203-247.

Rescher (1993). *Many-valued*. Great Britain: Gregg Revivals, 1993; Serie Modern Revivals in Philosophy.

Suppes, Patrick y Shirley, Hill (2007). *Primer Curso de Lógica Matemática*. México: Reverté.

Velarde, Julián (1982). *Tratado de Lógica, Lógica Formal*, tomo 2, Oviedo: Pantalfa.