



UNIVERSIDAD VERACRUZANA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

**“ANÁLISIS COMPARATIVO DE MÉTODOS
NUMÉRICOS EN INTEGRACIÓN DIRECTA PARA
EVALUAR LA RESPUESTA DINÁMICA DE
ESTRUCTURAS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

DE ESTRUCTURAS

P R E S E N T A

FRANCISCO DE JESÚS TREJO MOLINA

DIRECTOR DE TESIS: DR. BONIFACIO C. A. PEÑA PARDO

BOCA DEL RIO, VER

AGOSTO, 2007

A mi esposa e hijas, por que mis logros son suyos

Instituto de Ingeniería
Tesis de Maestría 2007
Universidad Veracruzana
Ing. Francisco de Jesús Trejo Molina

AGRADECIMIENTOS

A **Dios**, por la oportunidad de vivir estos momentos.

A mi esposa e hijas, por su motivación, amor y apoyo incondicional en todo momento.

A mis padres, hermanos, suegros, cuñados por su apoyo y buen ánimo.

Al Dr. Bonifacio C. A. Peña Pardo por su orientación siempre oportuna.

A mis sinodales por el tiempo empleado en la revisión de este trabajo y por sus valiosas observaciones al respecto.

ÍNDICE

| | |
|---------------------------------------------------|----|
| ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS | 8 |
| RESUMEN | 9 |
| ABSTRACT | 10 |
| 1. INTRODUCCIÓN | 11 |
| 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA | 13 |
| 2.1 Antecedentes | 13 |
| 2.2 Definición del problema | 13 |
| 2.3 Delimitación del problema | 14 |
| 3. OBJETIVOS | 15 |
| 3.1 Objetivos generales | 15 |
| 3.2 Objetivos específicos | 15 |
| 4. JUSTIFICACIÓN | 16 |
| 5. HIPÓTESIS | 18 |
| 6. ECUACIONES DE MOVIMIENTO | 19 |
| 6.1 Grados de libertad | 19 |
| 6.2 Sistemas con un solo grado de libertad | 20 |
| 6.2.1 Vibraciones libres | 22 |
| 6.2.2 Vibraciones libres de sistemas amortiguados | 24 |
| 6.2.3 Vibraciones forzadas | 27 |
| 6.3 Sistemas con varios grados de libertad | 29 |

| | | |
|---------|-------------------------------------------------|-----|
| 6.3.1 | Modos de vibración y frecuencias naturales | 31 |
| 6.3.2 | Propiedades de los modos naturales de vibración | 33 |
| 6.3.3 | Amortiguamiento | 37 |
| 6.3.4 | Solución de las ecuaciones de movimiento | 40 |
| 7. | MÉTODOS DE INTEGRACIÓN DIRECTA | 43 |
| 7.1 | Sistemas con un grado de libertad | 43 |
| 7.2 | Sistemas con varios grados de libertad | 60 |
| 7.2.1 | Método de aceleración lineal | 65 |
| 7.2.1.1 | Algoritmo de aplicación | 67 |
| 7.2.1.2 | Evaluación numérica | 68 |
| 7.2.2 | Método de la aceleración promedio | 76 |
| 7.2.2.1 | Algoritmo de aplicación | 77 |
| 7.2.2.2 | Evaluación numérica | 79 |
| 7.2.3 | Método de Wilson | 85 |
| 7.2.3.1 | Algoritmo de aplicación | 87 |
| 7.2.3.2 | Evaluación numérica | 88 |
| 8. | PROGRAMAS DE CADA UNO DE LOS MÉTODOS | 95 |
| 9. | RESULTADOS | 105 |
| 10. | CONCLUSIONES | 115 |
| 11. | RECOMENDACIONES | 117 |
| | BIBLIOGRAFIA | 118 |
| | ANEXOS | |

ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabla 7.1. Respuesta obtenida mediante el método de la aceleración lineal | 75 |
| Tabla 7.2. Respuesta obtenida mediante el método de la aceleración promedio | 84 |
| Tabla 7.3. Respuesta obtenida mediante el método de Wilson | 94 |
| <hr/> | |
| Fig. 6.1 Modelo analógico de sistemas de un solo grado de libertad | 21 |
| Fig. 6.2. Historia de carga general impulsiva | 27 |
| Fig. 6.3. Sistema con múltiples grados de libertad | 29 |
| Fig. 6.4. Deflexiones como suma de componentes modales | 36 |
| Fig. 7.1. Paso de tiempo en la respuesta de un sistema | 45 |
| Fig. 7.2. Representación de la interpolación de excitación lineal | 48 |
| Fig. 7.3. Representación de la aceleración lineal | 53 |
| Fig. 7.4. Curvas derivadas de la aceleración lineal | 54 |
| Fig. 7.5. Representación gráfica de la aceleración promedio | 57 |
| Fig. 7.6. Representación gráfica de la extensión de aceleración | 59 |
| Fig. 7.7. Sistemas dinámicos no lineales | 62 |
| Fig. 7.8. Modelo de la estructura ejemplo | 69 |
| Fig. 9.1. Respuestas con paso de tiempo de 0.1 s. y tiempo de estudio de 2 s. | 108 |
| Fig. 9.2. Respuestas con paso de tiempo de 0.02 s. y tiempo de estudio de 2 s. | 108 |
| Fig. 9.3. Respuestas con paso de tiempo de 0.1 s. y tiempo de estudio de 15 s. | 109 |
| Fig. 9.4. Respuestas con paso de tiempo de 0.02 s. y tiempo de estudio de 15 s. | 110 |
| Fig. 9.5. Respuestas con paso de tiempo de 0.16 s. y tiempo de estudio de 5 s. | 111 |
| Fig. 9.6. Respuestas con paso de tiempo de 0.1 s. y tiempo de estudio de 2 s. | 112 |
| Fig. 9.7. Respuestas con paso de tiempo de 0.02 s. y tiempo de estudio de 2 s. | 112 |
| Fig. 9.8. Respuestas con paso de tiempo de 0.1s. y tiempo de estudio de 15 s. | 113 |
| Fig. 9.9. Respuestas con paso de tiempo de 0.02 s. y tiempo de estudio de 15 s. | 114 |

RESUMEN

Este trabajo fue realizado por Francisco de Jesús Trejo Molina y tiene como título: “*Análisis comparativo de métodos numéricos en integración directa para evaluar la respuesta dinámica en estructuras*”, desarrollado en el Instituto de Ingeniería de la Universidad Veracruzana, el cual tiene como objetivo general: Analizar comparativamente los métodos numéricos de mayor utilidad propios de la dinámica estructural, para seleccionar aquél que sea adecuado en la obtención de la respuesta dinámica de estructuras particulares con varios grados de libertad. Como hipótesis se planteó que “El análisis de los métodos numéricos por integración directa permitirá determinar, el método viable a utilizar en la evaluación de la respuesta dinámica de un sistema con varios grados de libertad”.

Este trabajo aborda en forma introductoria y de manera general, los diferentes modelos con los que se puede obtener el comportamiento de un sistema estructural con un grado de libertad, al estar bajo la influencia de cargas dinámicas. Describe los procedimientos numéricos por integración directa comúnmente utilizados para la obtención del comportamiento de estructuras con varios grados de libertad, se hace énfasis en sus características y se presenta el desarrollo de la aplicación de cada uno de ellos para realizar su análisis.

En cuanto a los resultados, se presentan gráficas de cada uno de los métodos estudiados, las cuales fueron obtenidas mediante los datos generados por el programa en lenguaje Fortran 90/95 correspondiente. Las gráficas describen el comportamiento de una estructura ejemplo y con éstas se realiza el análisis comparativo.

Con los resultados obtenidos se comprobó la hipótesis planteada, abriéndose la posibilidad de realizar nuevas investigaciones sobre el tema y, a nuevas interrogantes con respecto a ¿Qué métodos utilizar para obtener la respuesta dinámica de estructuras específicas?

ABSTRACT

The present research by Francisco de Jesús Trejo Molina is titled “*Comparative analysis of numerical methods in direct integration to evaluate the dynamic response in structures*” developed in the Instituto de Ingeniería de la Universidad Veracruzana, has as a general objective: Analyze comparatively the numerical methods of greatest utility owned by the structural dynamic, to adequately obtain the dynamic response of structures with several degrees of freedom. As our hypothesis : "The analysis of the numeric methods by direct integration will allow to determinate the viable method to use in the evaluation of the dynamic response of a system with several degrees of freedom".

This work will approach in an introductory form and as a general manner, the different models that will be able to obtain the behavior of a structural system with a degree of freedom, which will be under the influence of dynamic loads. Describe the numerical procedures of direct integration to obtain the behavior of structures with several degrees of freedom, commonly used, making emphasis in their characteristics and presents the development of the application for everyone of them to accomplish its analysis.

As far as the results, graphs of each one of the methods studied obtained by means of the data generated by the program in corresponding Fortran 90/95 language appear. The graphs describe the behavior of a structure example and with these the comparative analysis is made.

With the obtained results the raised hypothesis was verified, opening the possibility of making new investigations on the subject and, to new questions with respect to: Which methods to use to obtain the dynamic response of specific structures?

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los aspectos que más ha requerido la atención de los ingenieros encargados del análisis y diseño de edificaciones de todo tipo, es el comportamiento de las estructuras ante la excitación de cargas dinámicas. Es por eso que se requiere de herramientas que permitan llevar a cabo dicho proceso con confiabilidad y rapidez.

Los constantes avances tecnológicos a nivel computacional aunados a procedimientos numéricos para realizar cálculos diversos evitando procesos de resolución compleja, ha generado que en la actualidad, los métodos numéricos tengan mayor aceptación por generar suficiente precisión en tiempos de procesamiento, actualmente insignificantes.

En este sentido, este trabajo tiene como objetivo prioritario analizar las características que presentan cada uno de los métodos numéricos más utilizados para la determinación de la respuesta de estructuras, con la finalidad de realizar una adecuada selección de aquél que proporcione resultados suficientemente confiables de acuerdo a situaciones específicas, como parte del análisis de la estructura en estudio; a la vez de proporcionar las subrutinas correspondientes a los métodos considerados en lenguaje Fortran 90/95 y ejemplos de aplicación que ayuden a su utilización tanto para estudiantes de maestría en estructuras como para interesados en ejercicio profesional.

En este trabajo se procedió a abordar de forma breve algunos conceptos básicos propios de la dinámica estructural, tales como las características de las ecuaciones de movimiento de uno y varios grados de libertad, haciendo énfasis en los métodos de solución de sistemas de varios grados de libertad por integración directa. Se analizó el comportamiento de cada uno de los métodos abordados y se procedió a hacer un análisis comparativo entre éstos. En cuanto a los resultados obtenidos, se comprobó que es de vital importancia seleccionar el método numérico por integración

directa adecuado para determinar la respuesta de la estructura en estudio, ya que en esto radica la confiabilidad de sus resultados.

Cabe mencionar que realizar este trabajo, no significa haber agotado todas las alternativas de solución y sus variantes, pero si proporciona una pauta para ser enriquecido a través de otros estudios, como el análisis de sistemas no lineales, por citar alguno.

Instituto de Ingeniería
Tesis de Maestría 2007
Universidad Veracruzana
Ing. Francisco de Jesús Trejo Molina

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 Antecedentes

Hace algunos años, era muy difícil determinar el comportamiento de una estructura, sobre todo cuando se encontraba sujeta bajo la acción de fuerzas que variaban con el tiempo, como lo son: las producidas por efectos de viento, sismo, oleaje, etc.; lo que generó la necesidad de simular dichos efectos y utilizar procedimientos numéricos que proporcionaran, aproximadamente, la respuesta de las estructuras afectadas por dichas cargas, y así poder realizar sus correspondientes diseños. Lo anterior implicaba que la resolución de dichos procedimientos resultara muy laboriosa, a la vez que se consumiera mucho tiempo y no se lograra la precisión adecuada, lo que hizo que estos métodos resultaran imprácticos. Con el advenimiento de las computadoras, se agilizaron los procesos de ejecución, sin embargo, aún se requería consumir mucho tiempo para lograr resultados adecuados. La constante evolución de la informática y de las computadoras ha logrado que, cálculos que se realizaban rústicamente con mucha dificultad, ahora se realicen con una considerable reducción de tiempo, logrando obtener resultados, casi en forma instantánea. De esta manera, la utilización de métodos numéricos que permiten determinar el comportamiento dinámico de estructuras, ha cobrado gran importancia, ya que se pueden realizar grandes cantidades de cálculos y obtener su solución con suficiente precisión en tiempos casi insignificantes.

2.2 Definición del problema

Al querer determinar el comportamiento de una estructura con características particulares que se encuentre bajo la acción de cargas dinámicas, se presenta la problemática de elegir el procedimiento adecuado que describa en forma precisa la posición desplazada de sus masas, relativas a su posición original.

Aunque en la actualidad existe información sobre diversos procedimientos de resolución, la mayoría de las veces ésta se basa en algún método particular, o bien, se refiere a varios métodos de forma muy superficial, lo cual deja como consecuencia “oscuridad” en su desarrollo, en su comportamiento y en sus limitaciones. Al no contar con la información requerida de cada uno de los métodos, así como desconocer cuáles de ellos pueden proporcionar resultados confiables en circunstancias específicas, el planteamiento del problema se presenta como sigue: ¿Cuál es el método numérico de integración directa adecuado para la evaluación de la respuesta dinámica de una estructura con múltiples grados de libertad?

2.3 Delimitación del problema

El presente trabajo analiza los métodos numéricos por integración directa de mayor utilización en la determinación de la respuesta dinámica de estructuras con varios grados de libertad, básicamente con comportamiento lineal.

3. OBJETIVOS

3.1 Objetivos generales

- Analizar comparativamente los métodos numéricos de mayor utilidad propios de la dinámica estructural, para seleccionar el adecuado en la obtención de la respuesta dinámica de estructuras con varios grados de libertad.
- Sentar las bases para que estudiantes de posgrado puedan estudiar otros procedimientos de resolución y profesionales en estructuras puedan aplicar estos métodos como complemento en análisis de estructuras reales.

3.2 Objetivos específicos

- Proveer de los conceptos básicos de uso común en dinámica estructural para su aplicación en la determinación de la respuesta dinámica de estructuras particulares.
- Caracterizar los procedimientos numéricos más usuales del método de integración numérica para la determinación de la respuesta dinámica de estructuras.
- Aplicar los diversos métodos de integración directa en la resolución de un problema estructural en particular.
- Proporcionar los programas en Fortran 90/95 correspondientes a los métodos en estudio.
- Realizar análisis comparativos de los métodos numéricos convenientes en casos particulares.
- Identificar el método viable para un determinado tipo de estructura mediante los resultados obtenidos.
- Proporcionar material de apoyo a estudiantes de posgrado para el estudio de temas relacionados.

4. JUSTIFICACIÓN

En la actualidad, como parte del diseño, existen diversos procedimientos para realizar el análisis de una estructura, las cuales tienen distinto nivel de refinamiento y se dividen en dos grandes grupos: Estáticos y Dinámicos, por lo que la respuesta de una estructura, como parte del análisis, tiene la misma clasificación. Ahora bien, dentro de los procedimientos dinámicos existen: el método de análisis modal espectral y los métodos de integración directa de las ecuaciones de movimiento, también llamados métodos de paso de tiempo. En esta segunda clasificación se encuentran aquellos métodos que debido a la cantidad de cálculos y de consideraciones requeridas para su ejecución, generaban resultados imprecisos y aún más, muy alejados de lo real al realizarse manualmente. Ahora que se tiene una constante evolución computacional, resulta importante retomar aquellos métodos empleados para la obtención de la respuesta de estructuras cuando éstas cuentan con un gran número de grados de libertad ya que en la actualidad los procesadores de información pueden manejar grandes cantidades de datos en muy pocos segundos, lo que hace que el tiempo de ejecución no sea ahora un problema. Sin embargo, aun con los avances tecnológicos, no se debe soslayar que el empleo de una técnica inadecuada, redundaría en la creación de una falsa idea del comportamiento de la estructura en cuestión.

En virtud de lo anterior, es de vital importancia conocer las alternativas de resolución y más aún, determinar la más adecuada, ya que es a través de éstas como se puede lograr resultados precisos que representen el comportamiento real de la estructura en estudio.

Conciente de lo antes mencionado, se identificó la necesidad de analizar los métodos numéricos de integración directa más comunes adecuados a la estructura en estudio; sus características, ventajas y limitaciones para poder realizar la elección apropiada

de acuerdo a las peculiaridades de la estructura, a la sollicitación dinámica y a la precisión deseada en los resultados.

Por lo anterior, este trabajo de tesis pretende ser de utilidad no solo para estudiantes de posgrado, sino para aquellas personas que se dedican profesionalmente al análisis y diseño de éstas.

Instituto de Ingeniería
Tesis de Maestría 2007
Universidad Veracruzana
Ing. Francisco de Jesús Trejo Molina

5. HIPÓTESIS

La gran variedad de situaciones dinámicas bajo las cuales puede estar sujeta una estructura y la necesidad de conocer su comportamiento lo más cercano a lo real, pone de manifiesto la importancia de hacer una buena elección sobre que procedimiento numérico utilizar para obtener resultados confiables.

Con el propósito de dar respuesta tanto al problema: ¿Cuál es el método numérico adecuado para la evaluación de la respuesta dinámica de una estructura particular, con varios grados de libertad?, como a los objetivos planteados en el presente trabajo, se formula la siguiente hipótesis:

“El análisis de los métodos numéricos por integración directa permitirá determinar el método viable a utilizar en la evaluación de la respuesta dinámica de un sistema con varios grados de libertad”.

Instituto de Ingeniería
Tesis de Maestría 2007
Universidad Veracruzana
Ing. Francisco de Jesús Tejido Mora

6. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Para representar el comportamiento físico de una estructura bajo condiciones de carga dinámica en forma cuantitativa, es necesario valerse de modelos matemáticos. Los modelos matemáticos no son más que idealizaciones conceptuales de estructuras reales que proveen un conocimiento exacto y preciso del comportamiento del modelo mismo, sin embargo solo representan una limitada y aproximada información del comportamiento del sistema real.

El modelo de análisis para una estructura en particular está representado por sus ecuaciones de movimiento, las cuales se obtienen considerando los grados de libertad supuestos, las condiciones de carga, sus dispositivos de amortiguación, rigidez (proporcionada por el material, forma y geometría de sus elementos) y masa.

Las ecuaciones de movimiento pueden ser determinadas mediante las *Leyes de Newton*, *Principio de D’Alembert*, *Principio de conservación de la energía*, *desplazamientos virtuales* y *Ecuaciones de Lagrange*, entre otros.

Para analizar dichas ecuaciones, es importante primeramente aclarar que son los grados de libertad.

6.1 Grados de libertad

Un factor importante para generar el modelo matemático o ecuaciones de movimiento son los grados de libertad, los cuáles son definidos por algunos autores como: “Número de coordenadas independientes y necesarias para especificar la configuración o posición de un sistema en cualquier tiempo” (Paz, 1985:3).

“Número de desplazamientos independientes requeridos para definir la posición desplazada relativa de todas las masas respecto a su posición original” (Chopra, 2001:7).

En otras palabras, los grados de libertad representan desplazamientos (lineales o angulares) que se estima tendrá la estructura en las uniones de sus elementos (nodos) o en sus masas concentradas, según sea el caso; al estar bajo la acción de cargas. Especifican la configuración deformada de la estructura, generalmente mediante dos hipótesis diferentes, el enfoque de masas concentradas y el enfoque de coordenadas generalizadas (Chopra, 2001).

Así, de acuerdo a lo anterior, se tiene que una estructura puede tener desde uno hasta N grados de libertad.

6.2 Sistemas con un grado de libertad

Esta clasificación del sistema estructural es la más simple, debido a que únicamente se considera una sola coordenada de desplazamiento. Su modelo matemático general está dado por la expresión

$$f_i + f_d + f_s = p(t) \quad (6.1)$$

Donde f_i representa las características de las fuerzas inerciales de la estructura, siendo igual a $m\ddot{u}$, donde m es la masa del sistema; f_d representa al amortiguamiento o características friccionantes y pérdida de energía de la estructura, expresada por $c\dot{u}$, donde c es una constante de proporcionalidad a la velocidad; f_s representa a la fuerza de restauración elástica, así como la capacidad de energía potencial de la estructura; resulta del producto ku , siendo k la rigidez del sistema; u, \dot{u} y \ddot{u} representan respectivamente, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la estructura, y $p(t)$ representa una fuerza o un sistema de fuerzas cualesquiera que varían con el tiempo (Clough y Penzien, 1993).

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (6.1) puede representarse ahora como:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t) \tag{6.2}$$

La cual es una ecuación diferencial de segundo orden, no homogénea, que esquemáticamente modela al sistema masa – resorte de la siguiente figura:



Fig. 6.1 Modelo analógico de sistemas de un solo grado de libertad. **a)** componentes básicos **b)** Diagrama de cuerpo libre.

En caso de un sismo, el movimiento de la aceleración del terreno (\ddot{u}_g), es transmitido a la estructura generando una excitación, de tal forma que el movimiento total de la masa puede expresarse ahora como la suma de la aceleración del suelo (\ddot{u}_g) y la aceleración natural de la masa (\ddot{u}).

$$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g$$

Por lo que

$$f_i = m \ddot{u}_t = m \ddot{u} + m \ddot{u}_g$$

Sustituyendo en (6.2)

$$m \ddot{u} + m \ddot{u}_g + c \dot{u} + k u = p(t)$$

Haciendo $p(t) = 0$ y acomodando

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{u}_g$$

Haciendo

$$-m \ddot{u}_g = p_{ef}(t)$$

Por tanto:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p_{ef}(t)$$

Lo cual indica que la excitación del suelo puede considerarse equivalente a una carga dinámica actuando sobre la estructura (Chopra, 2001).

En este trabajo se considerará en forma general que $p_{ef}(t)$ representa la fuerza de excitación generada por el movimiento del suelo, o bien la fuerza externa que actúa en función del tiempo sobre el sistema estructural.

Las fuerzas f_d y f_s pueden ser lineales o no lineales. Si se consideran lineales, la ecuación de movimiento adopta la forma de la ecuación (6.2). Si se consideran no lineales adopta la siguiente forma:

$$m \ddot{u} + f(\dot{u}, u) = p_{ef}(t) \quad (6.3)$$

6.2.1 Vibraciones libres

La forma básica de la ecuación de movimiento es cuando el sistema no se encuentra bajo la acción de fuerzas externas y en él no existe amortiguamiento. Esta situación resulta al desplazar la masa desde su posición de equilibrio y dejarla vibrar libremente, de tal forma que tenderá a oscilar alrededor de dicha posición. Si se aísla la masa y se plantea el equilibrio de fuerzas, da como resultado la ecuación diferencial de segundo orden homogénea siguiente:

$$m \ddot{u} + k u = 0 \quad (6.4)$$

Que también puede escribirse como

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (6.5)$$

Donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Siendo ω la frecuencia natural o frecuencia propia del sistema (dada en radianes por segundo) y es también la frecuencia a la que tiende a vibrar el sistema de acuerdo con sus propiedades.

Al resolver la ecuación (6.5) con coeficientes constantes, genera una solución de la forma

$$u(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t \quad (6.6)$$

Donde A y B son constantes arbitrarias que se calculan a partir de las condiciones iniciales del sistema. Si se considera que las condiciones iniciales son, para el desplazamiento $u(0) = u_0$, y para la velocidad $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$, en un tiempo $t = 0$; entonces al resolver la ecuación (6.6) se reescribe como:

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + u_0 \operatorname{cos} \omega t \quad (6.7)$$

Mediante identidades trigonométricas la ecuación anterior puede representarse también como

$$u(t) = A \operatorname{cos} (\omega t - \alpha), \quad \text{o bien como} \quad u(t) = A \operatorname{sen} (\omega t + \theta) \quad (6.8)$$

Donde $A = \sqrt{u_0^2 + (\dot{u}_0 / \omega)^2}$ es la amplitud de vibración y α o θ ángulos de fase que pueden ser obtenidos mediante las siguientes expresiones:

$$\tan \alpha = \frac{\dot{u}}{\omega u_0} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{\omega u_0}{\dot{u}} \quad (6.9)$$

Siendo $\alpha + \theta = 90^\circ$

6.2.2 Vibraciones libres de sistemas amortiguados

Para la descripción real de la fuerza de amortiguamiento de un sistema, se pueden utilizar modelos ideales de amortiguamiento que a menudo permitirán una satisfactoria predicción de la respuesta. Entre tales modelos, la fuerza de amortiguamiento viscoso (amortiguamiento proporcional a la velocidad), es la que permite el tratamiento matemático más simple, aunque no siempre represente las características reales de disipación de energía del sistema.

Los sistemas clasificados como *libres amortiguados* quedan esquematizados como se muestra en la figura 6.1, considerando $p(t) = 0$, por lo que la ecuación de movimiento queda ahora definida por :

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0 \quad (6.10)$$

Que también puede escribirse como:

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \frac{k}{m} u = 0 \quad (6.11)$$

Al resolver la ecuación diferencial anterior con coeficientes constantes, se reduce ésta a una ecuación algebraica de forma:

$$r^2 + \frac{c}{m} r + \frac{k}{m} = 0 \quad (6.12)$$

Cuyas raíces quedan expresadas por:

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (6.13)$$

Con lo que se obtiene la solución general de la ecuación diferencial (6.11), que adquiere la forma

$$u(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \tag{6.14}$$

Nuevamente, A y B son parámetros que se determinan de acuerdo a las condiciones iniciales del sistema.

Es de notar que la forma de la ecuación (6.14) dependerá de los valores que adopte la expresión bajo el radical de la ecuación (6.13), de donde se pueden presentar los siguientes casos:

- Si $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$, entonces las raíces $r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$. Recordando que

$\frac{k}{m} = \omega^2$, entonces la constante de amortiguamiento adquiere un valor crítico

$c = 2 \omega m = c_{cr}$, por lo que se dice el sistema está *críticamente amortiguado*, o sea que tiende a la posición de equilibrio en el menor tiempo posible. Por tanto, la razón entre la constante de amortiguamiento de un sistema y la constante de amortiguamiento crítico es

$$\frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2 m \omega} = \xi$$

Donde ξ es conocida como *razón de amortiguamiento*.

La respuesta entonces queda expresada como:

$$u(t) = e^{-\omega t} (A_1 + A_2 t) \tag{6.15}$$

Si se expresa la ecuación (6.13) en función de ξ , se obtiene:

$$r_{1,2} = -\xi \omega \pm \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Y ahora los casos se pueden identificar de acuerdo a si ξ es mayor que, menor que o igual a 1; observándose que para el caso de *amortiguamiento crítico* $\xi = 1$. Así:

- Si $c > c_{cr}$, es decir $\xi > 1$, las raíces r_1 y r_2 son reales y diferentes. En este caso el sistema está *sobre amortiguado* y tiende exponencialmente a su posición de equilibrio sin oscilar.
- Si $c < c_{cr}$, es decir $\xi < 1$, entonces el sistema se encuentra *sub amortiguado*, como sucede habitualmente en estructuras de edificación. En este caso las raíces r_1 y r_2 son imaginarias y el sistema vibra con amplitud decreciente hacia su posición de equilibrio. La respuesta del sistema adopta entonces la forma:

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} [A_1 \text{sen } \omega_d t + A_2 \text{cos } \omega_d t] \quad (6.16)$$

Donde
$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

Siendo ω_d la frecuencia natural amortiguada.

Comúnmente la diferencia entre ω_d y ω es muy pequeña. En edificaciones, generalmente ξ es menor del 20 por ciento, lo que implica que ω_d difiera de ω en menos de 2 por ciento, es decir, $\omega_d \cong \omega$ (Clough y Penzien, 1993).

Si se consideran como condiciones iniciales $u(0) = u_0$ y $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$ la respuesta en este caso queda representada como

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} \left[\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_d} \text{sen } \omega_d t + u_0 \text{cos } \omega_d t \right] \quad (6.17)$$

6.2.3 Vibraciones Forzadas

Un sistema forzado (amortiguado o no) es aquél sobre el cual actúa una carga durante un cierto tiempo, obligando al sistema a vibrar o seguir vibrando. Las cargas se pueden clasificar como: *constantes*, *impulsivas*, *armónicas*, etc., de acuerdo con sus características.

La ecuación general de movimiento de este tipo de sistemas queda expresada mediante la ecuación (6.2).

Para el caso de cargas dinámicas generales, se parte de la consideración de la carga como una fuerza impulsiva $P(\tau)$, actuando en un tiempo τ durante el intervalo $d\tau$, de acuerdo a la figura 6.2.

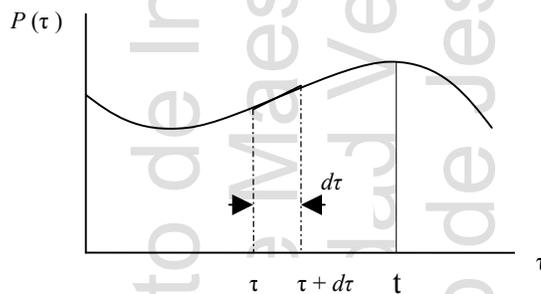


Fig. 6.2. Historia de carga general impulsiva

Este impulso actúa sobre un cuerpo de masa m , y produce un cambio en la velocidad, que puede ser determinada de acuerdo con la segunda ley de Newton

$$m \frac{dv}{d\tau} = P(\tau)$$

Reordenando se tiene que

$$dv = \frac{P(\tau) d\tau}{m} \quad (6.18)$$

La ecuación anterior expresa que el sistema experimentará un cambio de velocidad en un tiempo τ . Este cambio es introducido en la ecuación (6.7) junto con la velocidad inicial $\dot{u}_0 = 0$ y el desplazamiento inicial $u_0 = 0$, produciendo un desplazamiento en un tiempo posterior t , dado por

$$du(t) = \frac{P(\tau) d\tau}{m\omega} \text{sen } \omega(t - \tau)$$

Por tanto el desplazamiento total desde el tiempo $t = 0$ hasta el tiempo t debido a la acción continua de la fuerza $P(\tau)$ está representado por la expresión:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \text{sen } \omega(t - \tau) d\tau \quad (6.19)$$

Que es conocida como “*integral de Duhamel*”:

Ahora bien, la solución general de un sistema forzado sin amortiguamiento se puede obtener por superposición sumando la ecuación (6.19) a la ecuación (6.6), quedando la expresión de la forma

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \text{sen } \omega t + u_0 \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \text{sen } \omega(t - \tau) d\tau \quad (6.20)$$

De igual manera, la respuesta para un sistema forzado amortiguado queda representada por

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_d} \text{sen } \omega_d t + u_0 \cos \omega_d t \right] + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t - \tau) d\tau \quad (6.21)$$

Para la evaluación de la respuesta de acuerdo a cualquier otra historia de carga, como la que podría ocurrir en el caso de un sismo, existen varios procesos de integración numérica disponibles, algunos de los cuales son analizados por Paz, Mario (1985), Clough y Penzien (1993) y Chopra (2001), entre otros.

6.3 SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

En edificios, generalmente se acepta suponer que las masas están concentradas en los niveles de los pisos y que éstas se encuentran únicamente sujetas a fuerzas laterales; como se ilustra en la figura 6.3.

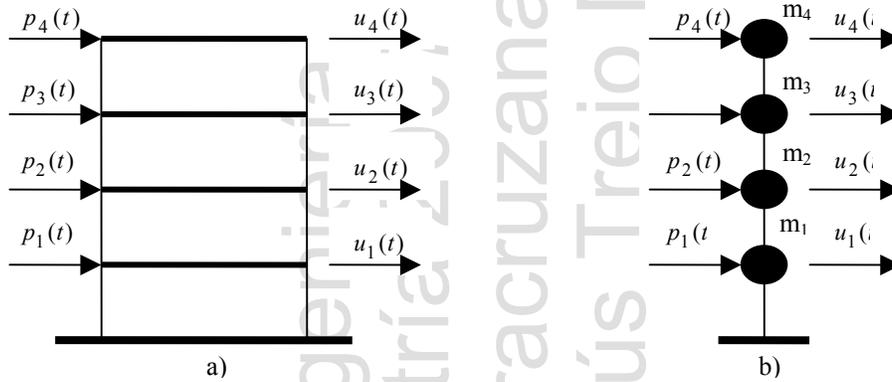


Fig.6.3.Sistema con múltiples grados de libertad. **a)** Marco sujeto a cargas dinámicas. **b)** Modelo idealizado con masas concentradas.

Se considera, de forma simplificada, que cada masa de piso posee un solo grado de libertad, correspondiente al desplazamiento generado por la fuerza aplicada. Las masas se suponen rígidas, unidas entre sí y al terreno por medio de dispositivos tanto elásticos como de amortiguamiento lineal, ambos carentes de masa. De esta manera, la ecuación de un sistema estructural con varios grados de libertad queda representado convenientemente en forma matricial como:

$$\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_S = \mathbf{P}_{ef}(t) \tag{6.22}$$

Donde:

- \mathbf{F}_S representa el vector de **fuerzas elásticas o resistentes**, estas fuerzas dependen de los desplazamientos, y usando coeficientes de influencia de rigidez, pueden expresarse como: $\mathbf{F}_s = \mathbf{K} \mathbf{u}$

Siendo \mathbf{K} la matriz de rigideces, generalmente es matriz simétrica; \mathbf{u} es el vector de desplazamientos.

- F_D representa el vector de las **fuerzas de amortiguamiento**, estas fuerzas dependen de la velocidad, y mediante coeficientes de influencia de amortiguamiento, pueden expresarse como: $F_D = C \dot{u}$
Siendo C la matriz de amortiguamiento, está constituida por coeficientes que dependen del amortiguamiento de la estructura; \dot{u} es el vector velocidad asociado al vector desplazamiento u .
- F_I representa el vector de las **fuerzas de inercia**, estas fuerzas dependen de la aceleración, y utilizando coeficientes de influencia de masa, pueden expresarse como: $F_I = M \ddot{u}$
Siendo M la matriz de masas y \ddot{u} es el vector aceleración asociado al vector desplazamiento u .
Cabe hacer notar que la matriz de masas es diagonal solamente cuando se elige como coordenadas, cantidades proporcionales a los desplazamientos del centroide de cada masa y las rotaciones de la masa respecto a sus ejes de inercia principales (masas concentradas), y es simétrica cuando se utiliza la idealización de masas generalizadas.

De acuerdo a lo anterior, la ecuación de movimiento queda expresada como:

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = P_{ef}(t) \quad (6.23)$$

Que representa a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, no homogéneas y es equivalente a la ecuación (6.2) para sistemas de un solo grado de libertad.

La ecuación anterior también representa generalmente un sistema de ecuaciones “acopladas”, es decir, las matrices M, C, K (o una de ellas) son simétricas. Es necesario tomar en cuenta que el acoplamiento depende de la selección de los grados de libertad a usarse para describir el movimiento.

6.3.1 Modos de vibración y frecuencias naturales

Al igual que en los sistemas de un grado de libertad es importante conocer las características de la estructura en “estado natural”, es decir, estado en el que depende únicamente de la masa y de la rigidez. Estas características son las *frecuencias naturales de vibración* y sus correspondientes configuraciones modales o *formas modales de vibración*, que se obtienen considerando sus vibraciones libres no amortiguadas. Para este caso las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

La cual representa a una estructura libre sin amortiguamiento y sin la intervención de ninguna fuerza externa. Por analogía con el comportamiento de sistemas de un solo grado de libertad, se asume que la vibración libre genera un movimiento armónico simple, por lo que la forma de solución es

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{a} \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

Siendo \mathbf{a} el vector de amplitudes y θ el ángulo de fase.

Derivando 2 veces:
$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2 \mathbf{a} \operatorname{sen}(\omega t + \theta) = -\omega^2 \mathbf{u}(t)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.24)
$$\mathbf{M} [-\omega^2 \mathbf{u}(t)] + \mathbf{K} [\mathbf{u}(t)] = \mathbf{0}$$

Se obtiene
$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.25a)$$

Se dice que una estructura vibra en uno de sus modos naturales cuando sus desplazamientos libres, que dependen del tiempo, pueden ponerse en la forma

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{q}(t) \phi$$

Donde ϕ es un *vector de forma modal* y $q(t)$ es la *coordenada normal*.

Derivando dos veces la expresión anterior y sustituyendo en (6.25a) se obtiene

$$\mathbf{K} \mathbf{q} \phi = \omega^2 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \phi \quad (6.25b)$$

Por tanto
$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \phi = 0 \quad (6.26)$$

Que es un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, donde para que existan valores de ϕ distintos de cero es necesario que el determinante del sistema se anule, esto es que:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (6.27)$$

La ecuación (6.27) es de grado N en ω^2 , llamada *ecuación característica* del sistema, en la que N es el número de grados de libertad. Su solución proporciona N raíces características, cuyas raíces cuadradas representan las frecuencias naturales del sistema (ω). Las N raíces son positivas y distintas; aunque en algunos sistemas puede resultar que una o más raíces sean iguales a cero, en las estructuras a las que nos referimos esto no es posible, ya que cuando menos una masa debe estar conectada al terreno mediante un sistema con comportamiento análogo a un resorte, y una frecuencia natural igual a cero implicaría una traslación de cuerpo rígido sin esfuerzos, lo que es impedido por la conexión del terreno (Rosenblueth, 1992).

Al sustituir la raíz ω_j^2 en la ecuación (6.26) se obtiene una ecuación matricial de orden N, que al resolverla permite determinar el vector que indica la forma del modo de vibrar natural j-ésimo (ϕ_j).

Al hacer la operación anterior para cada raíz característica ($\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_N^2$), se determinan las formas de todos los modos naturales correspondientes ($\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N$), una vez obtenidos, se ordenan convencionalmente de acuerdo

con las frecuencias naturales, en orden creciente ($\omega_1 < \omega_2 < \omega_3, < \dots < \omega_N$), de esta manera el primer modo natural (ϕ_1), corresponde a la frecuencia natural mínima ω_1 , y así sucesivamente.

Las raíces características ω_j^2 se conocen también como *valores característicos*, *valores propios* o *eigenvalores*; y el conjunto de las amplitudes del modo ϕ_j correspondiente, como *vector característico*, *vector propio* o *eigenvector*. Por tanto, la ecuación (6.26) corresponde entonces a un problema de obtención de valores propios y vectores propios.

Los coeficientes de cada uno de estos vectores representan las amplitudes relativas de movimiento para cada componente de desplazamiento y son elegidos arbitrariamente. Pueden ser escritos en una matriz cuadrada llamada **matriz modal**, en la que cada columna representa a un modo natural.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

6.3.2 Propiedades de los modos naturales de vibrar.

Los modos naturales de vibrar tienen las siguientes propiedades:

- **Ortogonalidad**
- **Normalización**
- **Expansión modal de los desplazamientos**

Dichas características se estudian brevemente a continuación.

- **Ortogonalidad**

La ortogonalidad puede interpretarse como la condición de que las fuerzas de inercia asociadas con el modo natural m-ésimo no ejecutan trabajo cuando se desplazan a través de la configuración del modo natural n-ésimo si $\omega_m \neq \omega_n$, ya que el conjunto de fuerzas de inercia F_i puede considerarse como el vector n-dimensional perpendicular a ϕ_n .

Esta propiedad se representa mediante la expresión:

$$\phi_m^T \mathbf{M} \phi_n = 0 \quad (6.28a)$$

De igual manera $\phi_m^T \mathbf{K} \phi_n = 0 \quad (6.28b)$

Siendo para ambos casos $m \neq n$.

Con lo que se concluye que los modos de vibrar (vectores propios) son ortogonales con respecto a la matriz de masas y de rigideces, respectivamente.

Ahora bien, una vez obtenida la matriz modal del sistema Φ , se forma con esta una base con la cual es posible transformar (desacoplar) a las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} (simétricas), en matrices \mathbf{K}' y \mathbf{M}' (diagonales), mediante las expresiones:

$$\mathbf{K}' = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad \mathbf{M}' = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (6.29)$$

Respectivamente a las expresiones anteriores, los elementos de las matrices diagonales son:

$$k'_n = \phi_n^T \mathbf{K} \phi_n, \quad m'_n = \phi_n^T \mathbf{M} \phi_n$$

• **Normalización**

La normalización es un proceso en el que se estandarizan las amplitudes de todas las configuraciones modales aplicando un factor de escala. En algunos casos se normaliza de tal forma que el mayor elemento de cada vector propio sea unitario, o bien, dividiendo cada uno de los elementos de cada vector propio por su respectiva magnitud. Sin embargo, se ha generalizado el uso de la normalización respecto a la matriz diagonal de masas \mathbf{M}' , la cual se logra ajustando cada amplitud modal del vector ϕ_n , para obtener la amplitud $\hat{\phi}_n$ ya normalizada.

De esta manera, partiendo de la expresión $m'_n = \phi_n^T \mathbf{M} \phi_n$

O bien, si la matriz de masas es diagonal $m'_n = \sum_{i=1}^n m'_i \phi_{i,n}^2$

Se obtiene que $\hat{\phi}_n = \phi_n m_n'^{-1/2}$

De tal forma que premultiplicando y postmultiplicando a la matriz \mathbf{M}' se obtiene

$$\hat{m}_n = \hat{\phi}_n^T \mathbf{M}' \hat{\phi}_n = 1 \tag{6.30}$$

En forma matricial: $\hat{\Phi}^T \mathbf{M}' \hat{\Phi} = \mathbf{I} \tag{6.31}$

Siendo \mathbf{I} una matriz identidad del tamaño de la matriz de masas. Cuando los modos son normalizados en esta forma, se dice que son *ortonormales* respecto a la matriz de masas.

Análogamente se puede normalizar respecto a la matriz de rigidez

$$\hat{k}_n = \hat{\phi}_n^T \mathbf{K}' \hat{\phi}_n$$

O bien, haciendo $\omega_n^2 = \lambda_n$

$$\hat{k}_n = \lambda_n m'_n = \lambda_n$$

De tal manera que en forma general se tiene:

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{K}' \hat{\Phi} = \Lambda \tag{6.32}$$

Siendo Λ una matriz diagonal denominada **matriz espectral** y es formada por los valores característicos obtenidos del sistema.

- **Expansión modal de los desplazamientos**

La expansión modal se refiere a que el total de configuraciones modales puede ser usado como base para representar el vector desplazamiento \mathbf{u} . Esto es, los modos de vibrar constituyen N desplazamientos independientes, cuyas amplitudes pueden utilizarse como coordenadas generalizadas para expresar alguna forma de desplazamiento deseado (Clough y Penzien,1993).

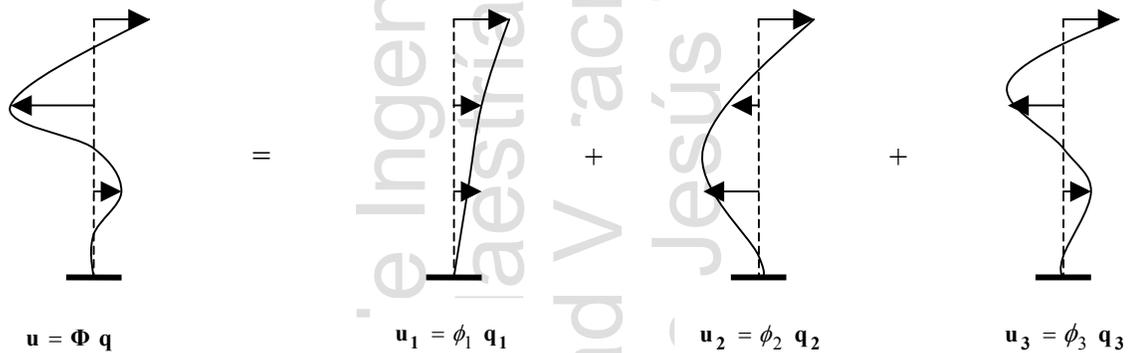


Fig.6.4. Deflexiones como suma de componentes modales

Entonces el desplazamiento total se obtiene como la suma de los componentes modales:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^N \phi_j \mathbf{q}_j(t) = \phi_1 \mathbf{q}_1 + \phi_2 \mathbf{q}_2 + \dots + \phi_n \mathbf{q}_n = \mathbf{\Phi} \mathbf{q}(t) \quad (6.33)$$

Siendo \mathbf{q} , vector de coordenadas generalizadas (coordenadas modales).

Premultiplicando la ecuación (6.33) por el producto de la transpuesta del correspondiente vector modal y la matriz de masa

$$\phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{u} = \phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \mathbf{q} \quad (6.34)$$

$$\phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \mathbf{q} = \phi_n^T \mathbf{M} \phi_1 \mathbf{q}_1 + \phi_n^T \mathbf{M} \phi_2 \mathbf{q}_2 + \dots + \phi_n^T \mathbf{M} \phi_n \mathbf{q}_n$$

Aplicando la propiedad de ortogonalidad a la expresión anterior:

$$\phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{u} = \phi_n^T \mathbf{M} \phi_n \mathbf{q}_n$$

Donde

$$\mathbf{q}_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{u}}{\phi_n^T \mathbf{M} \phi_n} \quad (6.35)$$

Las expresiones anteriores permiten realizar el cambio del conjunto de N ecuaciones acopladas de movimiento de un sistema de varios grados de libertad a un conjunto de ecuaciones desacopladas.

6.3.3 Amortiguamiento

Al considerar un sistema estructural con amortiguamiento, es necesario determinar los coeficientes de la matriz correspondiente, lo cual es posible mediante la consideración de las dimensiones de ésta, tamaño de sus elementos y propiedades de los materiales estructurales usados; sin embargo esta forma resulta impráctica, por lo que, es posible utilizar modelos ideales de amortiguamientos que describan en forma aproximada el comportamiento real del sistema y simplifiquen su proceso de determinación.

Ahora bien, para un sistema de varios grados de libertad, las matrices de amortiguamiento son generalmente simétricas (acopladas), por lo que para poder resolver la ecuación (6.23), es necesario que dicha matriz tenga características tales, que pueda también ser desacoplada, como ocurre con las matrices de rigideces y de masas, es decir:

$$\mathbf{C}' = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} \quad (6.36)$$

Existen varios procedimientos para determinar la matriz de amortiguamiento y lograr que la expresión anterior sea válida, entre los cuales, los que se mencionan a continuación.

1.- Es posible obtener la matriz \mathbf{C} considerando que es una combinación lineal de las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} de acuerdo a la siguiente expresión propuesta por Rayleigh (Clough y Penzien,1993).

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \tag{6.37}$$

Donde a_0 y a_1 son factores de proporcionalidad arbitrarios que satisfacen la condición de ortogonalidad $\phi_m^T \mathbf{C} \phi_n = 0$ siendo $m \neq n$.

Sin embargo, existen otras matrices que pueden ser formadas mediante las matrices de masas y de rigideces que también satisfacen la condición de ortogonalidad.

2.- En general, la matriz ortogonal de amortiguamiento puede ser obtenida de la forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_i a_i (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^i \tag{6.38}$$

Conocida como serie de Caughey, en la cual se pueden incluir tantos términos como se desee (Ídem).

Puede observarse que la expresión (6.37) está incluida en (6.38) como un caso particular. Con esta forma de matriz de amortiguamiento es posible determinar los coeficientes de amortiguamiento necesarios para proveer desacoplamiento del sistema considerando cualquier porcentaje de amortiguamiento deseado para el número de modos especificado, por tanto, para cualquier modo N , el amortiguamiento modal está dado por:

$$c_n = \phi_n^T \mathbf{C} \phi_n = 2 \xi_n \omega_n M_n$$

Sustituyendo la ecuación (6.38) en la expresión anterior, se obtiene

$$c_n = \phi_n^T \mathbf{M} \sum_i a_i (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^i \phi_n$$

Ahora, usando la ecuación $\mathbf{K} \phi_n = \omega^2 \mathbf{M} \phi_n$ y realizando operaciones algebraicas, se puede demostrar que el coeficiente de amortiguamiento asociado con cualquier modo N puede ser rescrito de la siguiente manera

$$c_n = \sum_i a_i \omega_n^{2i} M_n = 2 \xi_n \omega_n M_n$$

Despejando de la expresión anterior: $\xi = \frac{1}{2 \omega_n} \sum_i a_i \omega_n^{2i}$

En general, se especifican valores numéricos para la razón de amortiguamiento ξ , basados en datos experimentales de estructuras similares a la analizada. De esta manera se pueden determinar los coeficientes a_i en la expresión anterior y sustituirla en la ecuación (6.38) para finalmente obtener la matriz de amortiguamiento deseada.

3.- Otro método para evaluar la matriz de amortiguamiento asociada con cualquier conjunto de razón de amortiguamiento modal dado, se puede explicar empezando con la siguiente relación

$$C' = \Phi^T C \Phi = 2 \begin{bmatrix} \xi_1 \omega_1 M_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \xi_2 \omega_2 M_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \xi_3 \omega_3 M_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Se hace evidente que la matriz de amortiguamiento se puede obtener postmultiplicando y premultiplicando a C' por la inversa de la matriz modal y la inversa de su transpuesta:

$$C = (\Phi^T)^{-1} C' \Phi^{-1}$$

Sin embargo, en la práctica la expresión anterior no es conveniente porque la inversión de la matriz modal resulta un proceso largo, en lugar de ésta se aprovechan las propiedades de ortogonalidad y se obtiene la expresión (6.39), (ver deducción en Clough y Penzien, 1993).

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \left(\sum_{n=1}^N \frac{2 \xi_n \omega_n}{\hat{m}_n} \phi_n \phi_n^T \right) \mathbf{M}. \quad (6.39)$$

Es de notar que el porcentaje de amortiguamiento es la medida más efectiva de representar el amortiguamiento en el sistema.

6.3.4 Solución de las ecuaciones de movimiento

El problema fundamental de una estructura con varios grados de libertad es determinar su respuesta dinámica bajo la excitación de fuerzas externas efectivas, para lo cual existen diversos métodos, mismos que pueden clasificarse de la siguiente manera:

- **Análisis Modal (superposición modal)**
- **Análisis por Integración Directa**

A continuación se presentan generalidades del análisis modal dejando el estudio del análisis por integración directa (análisis directo), para el capítulo 7.

Análisis Modal (superposición modal)

Este método puede usarse para evaluar la respuesta dinámica de cualquier estructura lineal en el que los desplazamientos sean expresados en términos de un conjunto de N coordenadas discretas, y donde el amortiguamiento sea expresado por la razón de amortiguamiento modal. No se aconseja aplicarlo a estructuras compuestas con subsistemas de múltiples niveles de amortiguamiento ya que sus ecuaciones de movimiento no pueden ser desacopladas por transformación a coordenadas modales del sistema sin amortiguamiento, que es la base del método.

El procedimiento consiste en lo siguiente:

Se parte de la ecuación general de movimiento para una estructura con varios grados de libertad

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \tag{6.40}$$

Donde generalmente \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son matrices acopladas.

Se determinan los modos de vibración del edificio, al igual que sus correspondientes frecuencias naturales.

Una vez hecho lo anterior, se desacoplan las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} por ortogonalidad

$$\mathbf{K}' = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad \mathbf{M}' = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$$

Siendo ahora \mathbf{M}' y \mathbf{K}' matrices diagonales.

De igual manera, aplicando el procedimiento 3, suponiendo valores de ξ para cada modo de vibrar, se efectúa el desacoplamiento de la matriz de amortiguamiento del sistema lineal

$$\mathbf{C}' = \Phi^T \mathbf{C} \Phi$$

Donde la matriz \mathbf{C} debe obtenerse de acuerdo a lo mencionado anteriormente.

La ecuación de movimiento puede ser rescrita usando coordenadas generalizadas, junto con el modo y frecuencia modal correspondiente y un valor específico del porcentaje de amortiguamiento modal, de la siguiente manera:

$$\ddot{q}_n(t) + 2 \xi \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = p_n^*(t) / m'_n \tag{6.41}$$

Una vez resuelto el sistema (6.37) para q_n , el vector desplazamiento \mathbf{u} se determina sumando las contribuciones de los vectores modales, que se obtienen al efectuar el producto de los modos naturales de vibrar ϕ_j por sus respectivas amplitudes modales q_j , ecuación (6.42).

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^N \phi_j \mathbf{q}_j = \mathbf{\Phi} \mathbf{q}(t) \quad (6.42)$$

Conocidos los desplazamientos \mathbf{u} , se obtiene la respuesta de la estructura, y pueden evaluarse con ésta, las fuerzas desarrolladas en diversos componentes estructurales, así como sus respectivos esfuerzos.

Reafirmando, este método se aplica particularmente al análisis de fuerzas y deformaciones en edificios de varios niveles sujetos a vibraciones generadas por alguna fuerza externa o bien, un temblor con movimientos de terreno de moderada intensidad del suelo, que cause respuestas de la estructura moderadamente grandes, pero esencialmente lineales (Rosenblueth, 1992).

Instituto de Ingeniería
Tesis de Maestría 2007
Universidad Veracruzana
Ing. Francisco de Jesús Tejeda Molina

7. MÉTODOS DE INTEGRACION DIRECTA

Generalmente, se tienen situaciones físicas cuyos modelos matemáticos resultan complejos de resolver mediante procedimientos analíticos, ya sea por la dificultad del sistema en sí, por la no linealidad o por la cantidad de cálculos que se requieren para su evaluación, tal es el caso de los problemas dinámicos de estructuras. Bajo estas circunstancias, surgen procedimientos alternativos que, mediante operaciones aritméticas, proporcionan un resultado tan aproximado como se desee, estos procedimientos son los llamados métodos numéricos.

En esta clasificación se encuentran aquellos procedimientos que pueden ser utilizados tanto para sistemas lineales o no lineales, o bien, para aquellos sistemas cuya excitación varía en forma arbitraria con el tiempo.

El objetivo en este capítulo es determinar la respuesta dinámica de sistemas que tienen las características antes mencionadas, con varios grados de libertad; previo a esto, se contemplarán los sistemas de un solo grado de libertad.

7.1 Sistemas con un grado de libertad

Como se vió anteriormente, la ecuación general de movimiento está representada por

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p_{ef}(t) \quad (7.1)$$

cuya solución analítica está expresada en forma general, por

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} \left[\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_d} \text{sen } \omega_d t + u_0 \text{cos } \omega_d t \right] + \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t-\tau) d\tau$$

Sin embargo, existe una amplia variedad de métodos numéricos que pueden ser utilizados para obtener la solución de la ecuación (7.1), los cuales podemos clasificarlos como sigue

**Métodos Numéricos
para determinar la
respuesta de
estructuras**

- **Métodos paso a paso.**
- **Métodos de pasos múltiples.**
- **Métodos de integración directa (paso de tiempo).**

Estos métodos numéricos también se clasifican a su vez, en forma general, de acuerdo a la información obtenida en cada paso, como:

Métodos explícitos o abiertos: Son así llamados aquellos métodos cuya incógnita a determinar se encuentra solamente en el primer miembro de la ecuación.

Métodos implícitos o cerrados: Son los métodos cuya incógnita a determinar se encuentra en ambos miembros de la ecuación.

Ahora bien, es necesario aclarar que tanto los métodos *paso a paso* como los métodos de *pasos múltiples* son utilizados para determinar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias en general.

Dentro de la clasificación de métodos paso a paso se encuentran los métodos de Euler, Euler mejorado, Runge Kutta de tercer y cuarto orden, por citar algunos y dentro de los métodos de pasos múltiples se encuentran los métodos de Adams-Bashfort, Adams-Moulton y Adams-Bashfort-Moulton (método de Adams de cuarto orden) entre otros, los cuales son considerados en libros de análisis numérico o métodos numéricos.

En este trabajo se hará referencia solo a aquellos métodos que son especialmente útiles para la determinación de la respuesta dinámica de sistemas estructurales con uno o varios grados de libertad, que son los métodos de integración directa.

El termino “integración directa”, significa que para llevar a cabo la integración numérica de la ecuación de movimiento (7.1), no es necesario transformarla, es decir, la ecuación se utiliza directamente. (Bathe y Wilson, 1976). Estos métodos están basados en dos ideas principales:

- 1.- En lugar de satisfacer la ecuación (7.1) para un tiempo t , se busca satisfacerla solamente en intervalos discretos de tiempo Δt .
- 2.- Se asume una variación de desplazamientos, velocidades y aceleraciones con cada intervalo de tiempo.

De acuerdo a lo anterior, se toman en cuenta una serie de incrementos cortos de tiempo Δt , que generalmente se consideran de la misma magnitud por simplicidad de cálculo, siendo establecida la condición de equilibrio dinámico desde el inicio, hasta el término de cada intervalo. Si se trata de sistemas lineales, las propiedades de la estructura son constantes, pero si se trata de sistemas no lineales, se modifican para ajustarse al estado de deformación correspondiente. Esta modificación se logra mediante la resolución de la ecuación de movimiento que gobierna la respuesta del sistema en cuestión.

A continuación se establecerán en forma general, las expresiones incrementales de acuerdo al paso de tiempo, tomando como referencia la figura 7.1

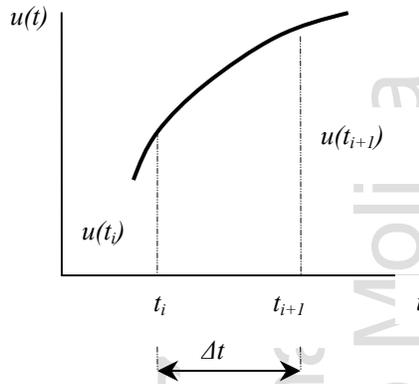


Fig. 7.1. Paso de tiempo en la respuesta de un sistema

Como la excitación está dada en tiempos discretos t_i , la ecuación de movimiento correspondiente será:

$$m \ddot{u}(t_i) + c \dot{u}(t_i) + k u(t_i) = p(t_i) \quad (7.2)$$

O bien, considerando la respuesta del sistema en este instante

$$m \ddot{u}_i + c \dot{u}_i + k u_i = p_i \quad (7.2a)$$

De la misma forma, es posible obtener los valores en el instante inmediato t_{i+1}

$$m \ddot{u}(t_{i+1}) + c \dot{u}(t_{i+1}) + k u(t_{i+1}) = p(t_{i+1}) \quad (7.3)$$

Siendo $i = 1,2,3,\dots$

O bien

$$m \ddot{u}_{i+1} + c \dot{u}_{i+1} + k u_{i+1} = p_{i+1} \quad (7.3a)$$

Haciendo $t_i = t$ y $t_{i+1} = t + \Delta t$ de acuerdo a la figura 7.1, las expresiones (7.2) y (7.3) pueden expresarse también como

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = p(t) \quad (7.4)$$

$$m \ddot{u}(t + \Delta t) + c \dot{u}(t + \Delta t) + k u(t + \Delta t) = p(t + \Delta t) \quad (7.5)$$

Restando la ecuación (7.4) a la ecuación (7.5) se obtiene

$$\Delta \ddot{u} = \ddot{u}(t + \Delta t) - \ddot{u}(t), \quad \Delta \dot{u} = \dot{u}(t + \Delta t) - \dot{u}(t) \quad \text{y} \quad \Delta u = u(t + \Delta t) - u(t)$$

De acuerdo a lo anterior, se tiene que la ecuación incremental de equilibrio para **sistemas lineales** queda como:

$$m \Delta \ddot{u} + c \Delta \dot{u} + k \Delta u = \Delta p \tag{7.6}$$

Donde: $\Delta f_i = m \Delta \ddot{u}, \quad \Delta f_d = c \Delta \dot{u} \quad \text{y} \quad \Delta f_s = k \Delta u$

O bien, para un tiempo t_i : $m \Delta \ddot{u}_i + c \Delta \dot{u}_i + k \Delta u_i = \Delta p_i \tag{7.6a}$

Para el caso de **sistemas no lineales** los coeficientes de amortiguamiento y de rigidez varían con el tiempo $c = c(t)$ y $k = k(t)$, por lo que en forma análoga a los sistemas lineales, el sistema de ecuaciones quedará representado como:

$$m \Delta \ddot{u} + c(t) \Delta \dot{u} + k(t) \Delta u = \Delta p \tag{7.7}$$

Donde:

$$\Delta f_i = m \Delta \ddot{u}, \quad \Delta f_d = c(t) \Delta \dot{u} \quad \text{y} \quad \Delta f_s = k(t) \Delta u$$

Ahora bien, Chopra (2001) clasifica a los métodos de integración directa como

Métodos de integración directa

1. **Métodos basados en la interpolación de la función de excitación.**
2. **Métodos basados en expresiones de diferencias finitas.**
3. **Métodos basados en la variación supuesta de la aceleración**

Estos métodos también se clasifican de acuerdo a su estabilidad como:

Métodos condicionalmente estables. Son los procedimientos numéricos que llevan a soluciones limitadas si el paso de tiempo es más corto que algún límite estable.

Métodos incondicionalmente estables. Son los procedimientos que no tienden a limitar la solución, independientemente de la longitud del paso de tiempo considerado.

Ahora bien, existen tres requerimientos importantes que deben considerarse al implementar un procedimiento numérico, los cuales se mencionan a continuación

Convergencia. Es la tendencia que tienen los resultados de los procedimientos numéricos a aproximarse a la solución exacta, mientras el paso de tiempo decrece.

Estabilidad. Significa que algunos errores obtenidos en la respuesta debido al redondeo, no se amplifican durante el proceso de integración numérica.

Precisión. Es el grado de acercamiento que tiene el resultado provisto por el procedimiento numérico respecto a la solución exacta.

A continuación se presentan los métodos de integración directa.

1. Métodos basados en la interpolación de la función de excitación.

Estos procedimientos numéricos son muy eficientes para sistemas lineales y consisten en la interpolación de la excitación sobre cada intervalo de tiempo arbitrario considerado Δt_i . Si los intervalos de tiempo son cortos, la interpolación lineal es satisfactoria.

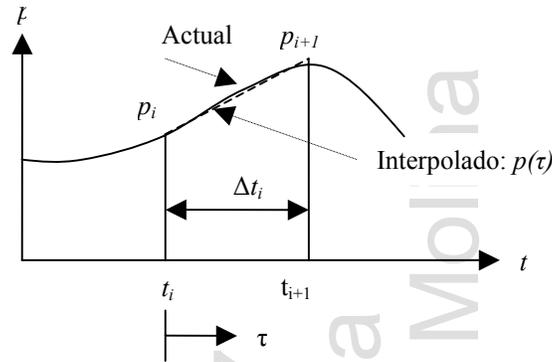


Fig. 7.2. Representación de la interpolación de excitación lineal

La figura anterior muestra que en el intervalo de tiempo mostrado, la función de excitación está dada por:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad \text{donde} \quad \Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$

En la cual la variable de tiempo τ varía de 0 a Δt_i .

La respuesta $u(\tau)$ en el intervalo considerado es generada por la suma de tres partes: **1)** La vibración libre debido al desplazamiento inicial u_i y la velocidad \dot{u}_i en un tiempo $\tau = 0$. **2)** La respuesta para la fuerza p_i con condiciones iniciales igual a cero, y **3)** La respuesta para la fuerza de rampa $(\Delta p_i / \Delta t_i) \tau$ con condiciones iniciales cero.

Adaptando las soluciones viables para estos tres casos, se concluye que las expresiones para la respuesta son

$$u_{i+1} = A u_i + B \dot{u}_i + C p_i + D p_{i+1} \tag{7.8}$$

$$\dot{u}_{i+1} = A' u_i + B' \dot{u}_i + C' p_i + D' p_{i+1} \tag{7.8a}$$

Donde los coeficientes A, A', B, B', \dots, D' solo requieren ser determinados una sola vez, y representan expresiones en las que se consideran los parámetros ξ, ω, k en el intervalo Δt_i .

Este procedimiento numérico es útil especialmente cuando la excitación se define en intervalos muy cortos de tiempo, como en movimientos de tierra por sismo, haciendo perfecta la interpolación lineal, por lo que solo resultan factibles únicamente para sistemas lineales de un solo grado de libertad, aunque imprácticos para sistemas con varios grados de libertad.

2. Métodos basados en expresiones de diferencias finitas de velocidad y aceleración

En esta clasificación se encuentra, entre otros, el método siguiente:

- **Método de la diferencia central**

Este método es de tipo *explícito* y está basado en expresiones de diferencias finitas para la velocidad y la aceleración, considerando pasos de tiempo constantes. La determinación de la respuesta queda representada básicamente por las siguientes expresiones

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \quad \ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad (7.9)$$

Que al sustituirlas en la ecuación de movimiento (7.2a) y reduciendo algebraicamente se obtiene que

$$\hat{p}_i = p_i - a u_{i-1} - b u_i \quad \text{y} \quad \hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \quad (7.10)$$

Y el desplazamiento para un tiempo t_{i+1} , queda dado por:

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$$

De las ecuaciones (7.9), se consideran \dot{u}_i y \ddot{u}_i como condiciones iniciales para un tiempo $t = 0$ y se desea conocer u_{i-1} , para lo cual \dot{u}_i se despeja de la primera ecuación y se sustituye en la segunda, obteniéndose:

$$u_{i-1} = u_0 - \Delta t (\dot{u}_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_0$$

Que se sustituye en la primera expresión (7.10).

El procedimiento tiene la tendencia de provocar un “disparo” en los resultados obtenidos cuando se utilizan tiempos que no son lo suficientemente cortos, lo que provoca imprecisión en ellos. Sus requerimientos de estabilidad son $\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi}$,

aunque esto no es una limitante para sistemas con un grado de libertad, ya que se requiere seleccionar pasos mucho más pequeños para obtener resultados lo suficientemente precisos. Para definir adecuadamente la respuesta, regularmente se usa $\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.1$, sin embargo, para efectos del movimiento de tierra por sismo se considera $\Delta t = 0.01 \text{ seg}$, o bien $\Delta t = 0.02 \text{ seg}$. (Chopra, 2001). En situaciones de no linealidad, este procedimiento es de fácil aplicación, pero no es popularmente usado en la práctica debido a que existen métodos que resultan más viables y efectivos.

3. Métodos basados en la variación supuesta de la aceleración

En ésta clasificación se encuentran los métodos siguientes:

a) Métodos de Newmark.

Newmark desarrolló una familia de métodos implícitos de integración directa basados sobre las siguientes ecuaciones (Chopra, 2001):

$$\begin{aligned}\dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1} \\ u_{i+1} &= u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + \left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1}\end{aligned}\quad (7.11)$$

Donde los parámetros β y γ definen la variación de la aceleración sobre un paso de tiempo, a la vez que determinan las características de estabilidad y precisión del método. La selección típica satisfactoria para γ es $\frac{1}{2}$; y para β , entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$.

Para sistemas lineales es posible modificar la formulación original de Newmark (7.11), implementando cantidades incrementales para su cálculo:

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, \quad \Delta \dot{u}_i = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i, \quad \Delta \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i \quad (7.12)$$

Si se sustituyen las expresiones (7.11) en (7.12), se obtiene:

$$\Delta \dot{u}_i = \Delta t \ddot{u}_i + \gamma \Delta t \Delta \ddot{u}_i \quad \Delta u_i = \Delta t \dot{u}_i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_i + \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{u}_i \quad (7.13)$$

Despejando $\Delta \ddot{u}_i$ de la segunda expresión de (7.13)

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \quad (7.14)$$

Sustituyendo ahora en la primera expresión de (7.13)

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{u}_i \quad (7.15)$$

Sustituyendo (7.14) y (7.15) en la ecuación de movimiento incremental (7.6a) se obtiene

$$\Delta u_i = \frac{\Delta p^*}{k^*} \quad (7.16)$$

Una vez conocida Δu_i , pueden determinarse $\Delta \dot{u}_i$ y $\Delta \ddot{u}_i$ de las ecuaciones (7.15) y (7.14) respectivamente, que al sustituirse en las expresiones (7.12), permite obtener las respuestas u_{i+1} , \dot{u}_{i+1} y \ddot{u}_{i+1} en un tiempo t_{i+1} , a partir de las respuestas u_i , \dot{u}_i y \ddot{u}_i en un tiempo t_i conocido.

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \quad (7.17)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{u}_i \quad (7.18)$$

La aceleración también puede obtenerse de la expresión:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c \dot{u}_{i+1} - k u_{i+1}}{m} \quad (7.19)$$

Y es necesaria para obtener la aceleración inicial, al empezar los cálculos, siempre y cuando las condiciones iniciales del desplazamiento y la velocidad sean diferentes de cero.

De acuerdo a los valores asignados para γ y β se distinguen dos casos especiales del método de Newmark que coinciden con los métodos de la aceleración lineal y la aceleración promedio que a continuación se mencionan y que se analizarán en forma independiente en el interior de este capítulo.

b) Método de la aceleración lineal.

El nombre de este procedimiento estriba en la suposición de la variación de la aceleración en forma lineal, en el paso de tiempo considerado para el cálculo, como se muestra en la figura 7.3, y cuya expresión fundamental es

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\Delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

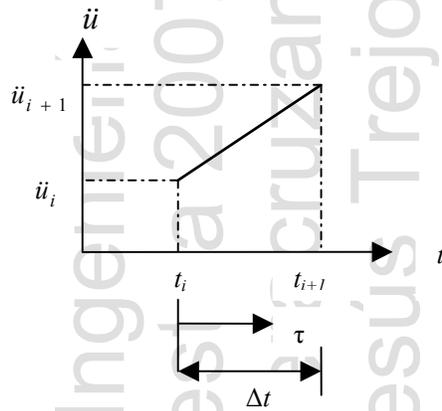


Fig.7.3 Representación de la aceleración lineal

La expresión anterior y $\beta = \frac{1}{6}$ en las expresiones de Newmark (7.11), quedando de la siguiente manera

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \tag{7.20}$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{6} \ddot{u}_{i+1} + \frac{1}{3} \ddot{u}_i \right)$$

Ahora bien, las expresiones de la respuesta en forma incremental son deducidas partiendo de la siguiente figura

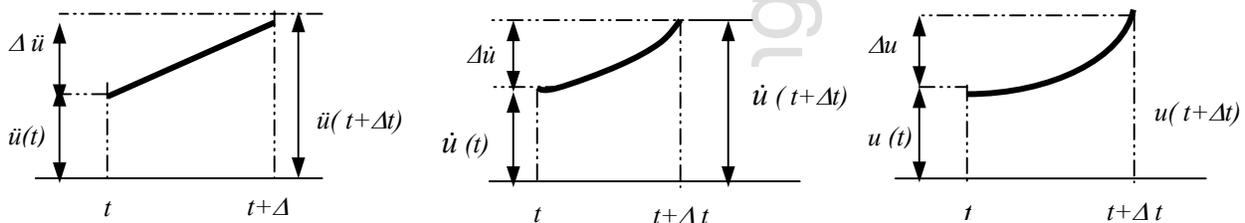


Fig.7.4. Curvas derivadas de la aceleración lineal. **a)** aceleración. **b)** velocidad **c)** desplazamiento

De la curva de aceleración se obtiene que

$$\Delta u = \dot{u}(t) \Delta t + \Delta \ddot{u} \Delta t / 2 \tag{7.21}$$

integrando

$$\Delta u = \dot{u}(t) \Delta t + \int_0^{\Delta t} \Delta \dot{u} d\tau$$

$$\Delta u = \dot{u}(t) \Delta t + \ddot{u}(t) (\Delta t)^2 / 2 + \Delta \ddot{u}$$

Pero:

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}(t) + \Delta \ddot{u}(\tau)$$

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}(t) + \Delta \ddot{u}(\tau) \tau / \Delta t$$

Integrando respecto a τ

$$\dot{u}(\tau) = \ddot{u}(t) \tau + \Delta \ddot{u}(t) \tau^2 / 2 \Delta t + C_1$$

$$\text{Si } \tau = 0; \quad u(\tau = 0) = u(t) = C_1$$

Sustituyendo C_1 en la expresión anterior

$$\dot{u}(t) = u(t) + \ddot{u}(t) \tau + \Delta \ddot{u}(t) \tau^2 / 2 \Delta t \tag{7.22}$$

Integrando nuevamente

$$u(t) = u(t) \tau + \ddot{u}(t) \tau^2 / 2 + \Delta \ddot{u}(t) \tau^3 / 6 \Delta t + C_2$$

$$\text{Si } \tau = 0; \quad u(0) = u(t) = C_2$$

Sustituyendo C_2 en la expresión de $u(t)$

$$u(t) = u(t) \tau + \ddot{u}(t) \tau^2 / 2 + \Delta \ddot{u}(t) \tau^3 / 6 \Delta t \tag{7.23}$$

Haciendo $\tau = \Delta t$

$$u(\tau = \Delta t) = u(t + \Delta t) \quad \text{y} \quad \dot{u}(\tau = \Delta t) = \dot{u}(t + \Delta t)$$

Entonces:

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + \ddot{u}(t) \Delta t + (\Delta \ddot{u}(t) \Delta t) / 2$$

Pero $\Delta \dot{u}(t) = \dot{u}(t + \Delta t) - \dot{u}(t)$, entonces

$$\Delta \dot{u}(t) = \ddot{u}(t) \Delta t + \Delta \ddot{u}(t) \Delta t / 2 \tag{7.24}$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t) \Delta t + \ddot{u}(t) (\Delta t^2 / 2) + (\Delta \ddot{u}(t) / \Delta t) (\Delta t^3 / 6)$$

$$\Delta u(t) = \dot{u}(t) \Delta t + \ddot{u}(t) (\Delta t)^2 / 2 + \Delta \ddot{u}(t) (\Delta t)^2 / 6 \quad (7.25)$$

Despejando $\Delta \ddot{u}(t)$

$$\Delta \ddot{u}(t) = 6 \Delta u(t) / (\Delta t)^2 - 6 \dot{u}(t) / \Delta t - 3 \ddot{u}(t) \quad (7.26)$$

Sustituyendo la ecuación (7.26) en la ecuación (7.24)

$$\Delta \dot{u}(t) = 3 \Delta u(t) / \Delta t - 3 \dot{u}(t) - \frac{1}{2} \ddot{u}(t) \Delta t \quad (7.27)$$

Sustituyendo (7.26) y (7.27) en la ecuación de equilibrio

$$m \Delta \ddot{u}(t) + c \Delta \dot{u}(t) + k \Delta u(t) = \Delta p(t)$$

se tiene

$$m \left[6 \Delta u(t) / (\Delta t)^2 - 6 \dot{u}(t) / \Delta t - 3 \ddot{u}(t) \right] + c \left[3 \Delta u(t) / \Delta t - 3 \dot{u}(t) - \frac{1}{2} \ddot{u}(t) \Delta t \right] + k \Delta u = \Delta p$$

Agrupando

$$\left[6m / \Delta t^2 + 3c / \Delta t + k \right] \Delta u(t) = \Delta p(t) + c \left[3 \dot{u}(t) + \frac{1}{2} \ddot{u}(t) \Delta t \right] + m \left[6 \dot{u}(t) / \Delta t + 3 \ddot{u}(t) \right]$$

Haciendo

$$\left[6m / \Delta t^2 + 3c / \Delta t + k \right] = k^*$$

$$y \quad \Delta p(t) + c \left[3 \dot{u}(t) + \frac{1}{2} \ddot{u}(t) \Delta t \right] + m \left[6 \dot{u}(t) / \Delta t + 3 \ddot{u}(t) \right] = \Delta p^*$$

Entonces

$$k^*(t) \Delta u(t) = \Delta p^*(t)$$

$$\text{por tanto} \quad \Delta u(t) = \frac{\Delta p^*(t)}{k^*} \quad (7.28)$$

Donde k^* es la rigidez efectiva

$\Delta p^*(t)$ es el incremento de carga efectivo

Si se considera que

$$u(0) = u_0; \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

Entonces

$$m \ddot{u}(0) = [p(0) - c(0) \dot{u}(0) - k(0) u(0)]$$

Despejando \ddot{u} , se obtiene:

$$\ddot{u}(t + \Delta t) = \left(\frac{1}{m}\right) [p - c \dot{u}(t + \Delta t) - k u(t + \Delta t)] \quad (7.29)$$

De esta manera, mediante un proceso iterativo y considerando la masa constante en todo el proceso, se obtiene la respuesta del sistema.

c) Método de la aceleración promedio.

El nombre de éste procedimiento estriba en considerar la aceleración promedio durante un intervalo de tiempo, como se representa en la figura 7.5. Su expresión

representativa es: $\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2} (\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$

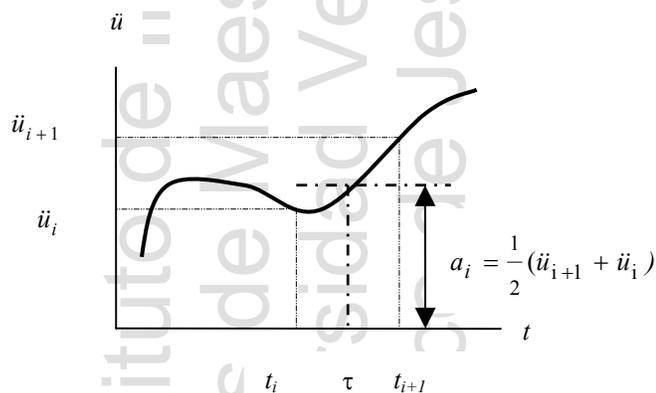


Fig.7.5 Representación grafica de la aceleración promedio

De igual manera que en el método anterior, se puede obtener la respuesta de este procedimiento haciendo $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$ en las expresiones de Newmark (7.11), quedando de la siguiente forma (Chopra,2001):

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \tag{7.30}$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

Las expresiones en forma incremental son deducidas a continuación:

De acuerdo con la figura 7.5:

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \tag{7.31}$$

Integrando dos veces:

$$\dot{u}_{i+1}(t) = \dot{u}_i + \Delta t \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \tag{7.32}$$

$$u_{i+1}(t) = u_i + \dot{u}_i \Delta t + (\Delta t)^2 \frac{1}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \tag{7.33}$$

Representando en forma de incrementos

$$\Delta \ddot{u}_i = (4 / (\Delta t)^2) (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t) - 2\ddot{u}_i \tag{7.34}$$

$$\Delta \dot{u}_i = (2 / \Delta t) \Delta u_i - 2\dot{u}_i \tag{7.35}$$

Sustituyendo (7.34) y (7.35) en la ecuación de movimiento incremental:

$$m \Delta \ddot{u} + c \Delta \dot{u} + k \Delta u = \Delta p(t)$$

$$m [(4 / \Delta t^2) (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t) - 2\ddot{u}_i] + c [(2 / \Delta t) \Delta u_i - 2\dot{u}_i] + k \Delta u = \Delta p_i(t)$$

Agrupando

$$k + (2c / \Delta t) + (4m / \Delta t^2) = k_i^*$$

$$\Delta p_i + [(4m / \Delta t^2) + 2c] \dot{u}_i + 2m \ddot{u}_i = \Delta p_i^*$$

Reduciendo:

$$k^* \Delta u(t) = \Delta p^*(t)$$

Por tanto:

$$\Delta u_i(t) = \frac{\Delta p_i^*}{k^*}$$

$$\Delta \dot{u}_i = (2 / \Delta t) \Delta u_i - 2 \dot{u}_i$$

$$\Delta \ddot{u}_i = (4 / \Delta t^2) (\Delta u_i - \dot{u}_i \Delta t) - 2 \ddot{u}_i$$

Sustituyendo en (7.36):

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i \\ \ddot{u}_{i+1} &= \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i \end{aligned} \tag{7.36}$$

Así, obtenemos la respuesta del sistema.

d) Método de Wilson.

Este método resulta de una modificación del método de aceleración lineal, como alternativa de solución básicamente de sistemas no lineales, dicha modificación está basada sobre la suposición de que la aceleración varía linealmente sobre una extensión de paso de tiempo $\delta t = \theta \Delta t$, como se muestra en la figura 7.6

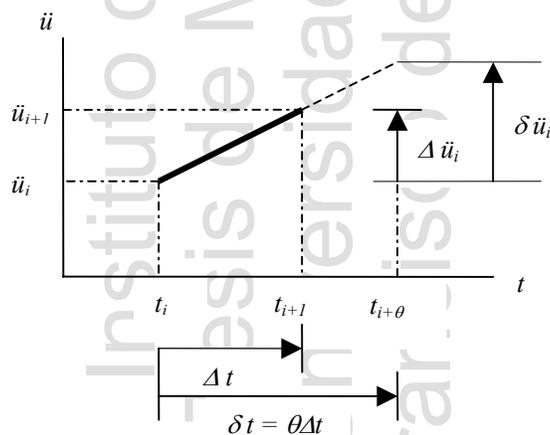


Fig.7.6 Representación gráfica de la extensión de la aceleración

El procedimiento numérico puede ser derivado reescribiendo la relación básica del método de aceleración lineal deducido anteriormente, como se muestra a continuación:

Retomando las ecuaciones (7.21) y (7.25) :

$$\Delta \dot{u} = \ddot{u}(t) \Delta t + \Delta \ddot{u} \Delta t / 2$$

$$\Delta u(t) = \dot{u}(t) \Delta t + \ddot{u}(t) (\Delta t)^2 / 2 + \Delta \ddot{u}(t) (\Delta t)^2 / 6$$

Reemplazando en ellas a Δt por δt y a los incrementos de respuesta, por $\delta u_i, \delta \dot{u}_i, \delta \ddot{u}_i$, se obtienen las ecuaciones correspondientes para el paso de tiempo “extendido”

$$\delta \dot{u}_i = \delta t \ddot{u}_i + \frac{1}{2} \delta t \delta \ddot{u}_i \tag{7.37}$$

$$\delta u_i = \delta t \dot{u}_i + \frac{1}{2} (\delta t)^2 \ddot{u}_i + \frac{1}{6} (\delta t)^2 \delta \ddot{u}_i \tag{7.38}$$

Despejando $\delta \ddot{u}_i$:

$$\delta \ddot{u}_i = 6 \delta u_i / (\delta t)^2 - 6 \dot{u}_i / \delta t - 3 \ddot{u}_i \tag{7.39}$$

Sustituyendo (7.39) en (7.37):

$$\delta \dot{u}_i = \delta t \ddot{u}_i + \frac{1}{2} \delta t \left(6 \delta u_i / (\delta t)^2 - 6 \dot{u}_i / \delta t - 3 \ddot{u}_i \right) \tag{7.40}$$

Reduciendo
$$\delta \dot{u}_i = 3 (\delta u_i / \delta t) - 3 \dot{u}_i - \frac{1}{2} \delta t \delta \ddot{u}_i \tag{7.41}$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento:

$$m \delta \ddot{u}_i + c \delta \dot{u}_i + k \delta u_i = \delta p_i$$

Haciendo $\delta p_i = \theta \Delta p_i$

$$k^* \delta u_i = \delta p^*$$

Donde:

$$k_i^* = k_i + 3 c / (\theta \Delta t) + 6 m / (\theta \Delta t)^2$$

$$\delta p_i^* = \theta \Delta p_i + \left(\frac{6m}{\theta \Delta t} + 3c \right) \dot{u}_i + \left(3m + \frac{1}{2} \theta \Delta t c \right) \ddot{u}_i$$

El incremento de aceleración sobre el paso del tiempo normal está dado entonces por $\Delta \ddot{u}_i = \delta \ddot{u}_i / \theta$ y el incremento de velocidad y desplazamiento son determinados mediante las expresiones (7.36).

Este método es usado para aproximar las derivadas del sistema de ecuaciones de movimiento, a fin de que la integral pueda ser realizada paso a paso.

7.2 Sistemas con varios grados de libertad.

Si se requiere determinar la respuesta dinámica de un sistema con varios grados de libertad que se encuentre estrictamente dentro del rango elástico lineal, es posible utilizar la superposición modal (análisis modal); pero si se cuenta con estructuras grandes y complejas o con una excitación como lo es el movimiento de tierra por un sismo, cargas impulsivas de corta duración, sistemas con amortiguamiento no clásico, o bien sistemas cuyo comportamiento se encuentra en el rango no lineal, es necesario resolver el sistema utilizando alguno de los métodos de integración directa mencionados anteriormente.

Estos procedimientos numéricos tienen la ventaja de no requerir de la determinación de modos, formas y frecuencias de vibración; no es necesario desacoplar el sistema para hallar su respuesta, y además, para sistemas lineales se supone que las propiedades de la estructura permanecen constantes en todos los incrementos de tiempo.

Ahora bien, por tratarse de un sistema con varios grados de libertad, es conveniente darle a los métodos un tratamiento matricial como se muestra a continuación.

De acuerdo con la figura 7.1, y la exposición hecha al respecto anteriormente, se parte de la consideración de la ecuación de movimiento incremental para sistemas lineales:

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{P}_{ef}(t) \quad (7.42)$$

Donde \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} , y $\Delta \mathbf{P}$ son las matrices de masas, de amortiguamiento, de rigideces y el vector de cargas efectivas, respectivamente; $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \dot{\mathbf{u}}$ y $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$ son los vectores incrementales de desplazamiento, de velocidad asociado al vector desplazamiento y de aceleración asociado al vector desplazamiento, respectivamente. De tal forma que:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i, \quad \Delta \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_{i+1} - \dot{\mathbf{u}}_i \quad \text{y} \quad \Delta \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (7.43)$$

Sistemas no lineales.

Como se indicó anteriormente, en este tipo de sistemas las propiedades físicas no permanecen constantes durante el tiempo considerado, ya sea por las características de los materiales estructurales, por los cambios significativos de las cargas axiales en los miembros de la estructura, o por problemas que en dinámica estructural no pueden ser considerados como lineales; es por eso que ahora el sistema de ecuaciones diferenciales queda representada como

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t) \Delta \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}(t) \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{p}(t) \quad (7.44)$$

Al igual que en el caso de sistemas lineales, en esta aproximación la respuesta es evaluada por una serie de cortos incrementos de tiempo Δt , generalmente tomados de igual longitud por conveniencia de cálculo. La condición de equilibrio dinámico se establece al inicio y término del intervalo considerado, evaluando aproximadamente el movimiento del sistema durante el incremento de tiempo con base en el mecanismo de respuesta supuesto. En cada inicio de incremento de tiempo se debe representar la no linealidad del sistema, ajustando las propiedades en forma adecuada para el estado de deformación prevaleciente, de tal forma que la respuesta completa (desplazamiento, velocidad y aceleración) al extremo final de un intervalo, sea el punto de partida para el inicio del siguiente intervalo. En consecuencia, el procedimiento continúa paso a paso desde el inicio de la aplicación de la carga hasta un tiempo conveniente de estudio, aproximando el comportamiento

no lineal como una secuencia de cambios sucesivos del sistema lineal (Clough y Piezen, 1993).

La aproximación que se realiza mediante métodos de integración directa es con base al comportamiento de la curva *fuerza-desplazamiento*, como se aprecia en la figura siguiente:

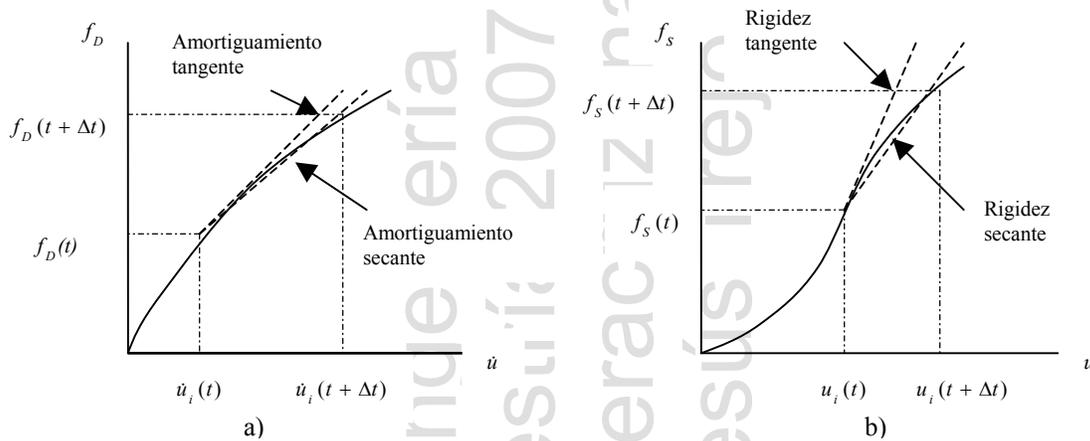


Fig. 7.7. Sistemas dinámicos no lineales. a) amortiguamiento no lineal. b) rigidez no lineal.

En muchas ocasiones por cuestiones prácticas, en la evaluación de la respuesta se considera la rigidez tangente (K_t) en la ecuación de movimiento no lineal, en lugar de la rigidez secante (K_{sec}). Esto es válido para sistemas lineales, pero para sistemas no lineales conduce a resultados inexactos, más aún si se consideran pasos de tiempo largos y constantes.

Debido a lo anterior, se puede decir entonces que los errores significativos en el análisis surgen por dos razones (Chopra, 2001):

- 1.- Se utiliza la rigidez tangente en lugar de la rigidez secante.
- 2.- Se considera un paso constante de tiempo, el cual produce retraso en la detección de la transición en la relación *fuerza- deformación*.

Para el primer caso, el error puede ser minimizado considerando la rigidez tangente y el uso de procedimientos iterativos. Uno de los procedimientos utilizados en estos casos es el de Newton-Raphson modificado, mismo que puede consultarse en algunos textos de métodos numéricos.

En el segundo caso, se puede reducir el error mediante la subdivisión de los pasos de tiempo en “sub-pasos” más pequeños que el considerado, regularmente $(\Delta t/4)$; en forma alternativa puede ser utilizado un proceso iterativo en el cual la integración se resume en el tiempo considerado y cuyo tamaño sea ajustado progresivamente hasta que en el extremo del tiempo la velocidad tienda a ser cero.

Ahora bien, para la selección del paso de tiempo adecuado, deben considerarse los siguientes factores:

- El rango de variación de la carga aplicada.
- La complejidad de las propiedades no lineales de amortiguamiento y rigidez.
- El periodo de vibración de la estructura.

El incremento de tiempo debe ser lo bastante corto para permitir la representación formal de todos estos factores. En general, la variación de las propiedades del material no es un factor crítico, a menos que se presenten cambios súbitos significativos. Para tratar este efecto correctamente basta con introducir una subdivisión en el incremento de tiempo (Clough y Piezen, 1993).

Por otro lado, puede resultar ventajoso transformar el sistema original (coordenadas normales) a un conjunto de ecuaciones cuyos desplazamientos queden expresados en función de los primeros j -modos naturales de vibración (coordenadas generalizadas), como en sistemas estructurales donde el amortiguamiento permanece lineal al igual que la estructura (en este caso no todos los modos de vibrar son significativos para la obtención de la respuesta), o en sistemas no lineales (cuyos desplazamientos pueden ser expresados como una combinación lineal de los modos naturales de vibración del sistema sin amortiguamiento vibrando en el rango

de su comportamiento lineal), dicha transformación se realiza mediante las expresiones:

$$(\mathbf{q}_n)_0 = \frac{\Phi_n^t \mathbf{M} \mathbf{u}_0}{\Phi_n^t \mathbf{M} \Phi_n} \quad (\dot{\mathbf{q}}_n)_0 = \frac{\Phi_n^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_0}{\Phi_n^t \mathbf{M} \Phi_n} \quad (7.46)$$

Esta transformación puede ser de utilidad para reducir el sistema y desacoplar la ecuación de movimiento, de tal forma que quede transformada en un sistema con *coordenadas generalizadas*.

$$\mathbf{M}' \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}' \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}' \mathbf{q} = \mathbf{P}(t) \quad (7.47)$$

En estos casos el esfuerzo computacional adicional para determinar los primeros “j-modos” de vibración y generar las ecuaciones (7.46), puede ser compensado con los resultados que se obtienen, pero si muchos de los “j-modos” contribuyen a la excitación del sistema, entonces es preferible determinar la solución en forma directa, o sea, de acuerdo a la ecuación (7.42)(Chopra, 2001).

Como se mencionó anteriormente, en caso de que el amortiguamiento del sistema no tenga un comportamiento lineal o no pueda ser idealizado de ésta manera, como ocurre en un gran número de estructuras, es posible que la matriz de amortiguamiento sea obtenida de acuerdo a las ecuaciones (6.38) o (6.39) para lograr que \mathbf{C}' cumpla con la condición de ortogonalidad.

A continuación se hará el análisis de los métodos de mayor utilización en la práctica para este tipo de sistemas.

7.2.1 Método de la aceleración lineal.

Como se mencionó, este método se basa en la suposición de que la aceleración permanece lineal durante los intervalos de tiempo considerados. La utilización de

este método se hace en forma análoga al caso de sistemas de un solo grado de libertad.

La aplicación del método es la siguiente:

Dadas las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} y el vector $\Delta\mathbf{P}$, se obtiene la aceleración inicial mediante la expresión

$$\ddot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{p}(0) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(0) - \mathbf{K}\mathbf{u}(0)]$$

O bien, tomando en cuenta condiciones iniciales $\ddot{u}(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$.

Se selecciona el paso de tiempo de estudio Δt , se determinan las rigideces del sistema y los incrementos de carga mediante las expresiones

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + 6\mathbf{M}/(\Delta t)^2 + 3\mathbf{C}/\Delta t$$

$$\Delta\mathbf{P}^* = \Delta\mathbf{P}(t) + \mathbf{C} \left[3\dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}(t)\Delta t \right] + \mathbf{M} \left[6\dot{\mathbf{u}}(t)/\Delta t + 3\ddot{\mathbf{u}}(t) \right]$$

Las cuales se utilizan para determinar el desplazamiento incremental del sistema, mediante:

$$\Delta\mathbf{u} = (\mathbf{K}^*)^{-1} \Delta\mathbf{P}^*(t)$$

Y a partir de esta, determinar las siguientes expresiones

$$\Delta\dot{\mathbf{u}} = 3\Delta\mathbf{u}(t)/\Delta t - 3\dot{\mathbf{u}}(t) - \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}(t)\Delta t$$

$$\Delta\ddot{\mathbf{u}} = 6\Delta\mathbf{u}/(\Delta t)^2 - 6\dot{\mathbf{u}}(t)/\Delta t - 3\ddot{\mathbf{u}}(t)$$

Para luego, obtener la respuesta del sistema en el paso considerado, mediante:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_i \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta\dot{\mathbf{u}}_i \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta\ddot{\mathbf{u}}_i$$

Convirtiéndose el procedimiento en un proceso iterativo.

En general el análisis con este método proporcionará una buena precisión para movimientos de la estructura asociados con periodos de vibración al menos de 5 a 10 veces más grande que el intervalo de integración(Clough y Piezen,1993).

Este procedimiento resulta estable si $\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551$, sin embargo, para que el método sea lo suficientemente exacto, Δt debe ser bastante pequeño, es decir $\Delta t < 0.551 T_n$. Debido a ésta limitante, este método se considera como *condicionalmente estable* y tiende a “dispararse” si es aplicado a componentes de respuesta modal teniendo periodos de vibración menor que cerca de 1.8 veces el intervalo de integración. Por lo que, el incremento de tiempo debe ser relativamente corto para el mínimo periodo de vibración contenido en el sistema estructural, sin hacer caso de si el modo mayor contribuye significativamente a la respuesta dinámica o no.

Esta limitación sobre la longitud del paso de tiempo de integración puede no ser de consecuencia para ciertos tipos de estructuras con VGDL, como son las edificaciones con notable historia múltiple, las cuales son idealizadas para tener solo un grado de libertad por historia. Para el análisis sísmico de tales estructuras, el intervalo de tiempo debe ser reducido de orden para proveer una adecuada descripción del movimiento de tierra, y el periodo más corto de vibración del modelo matemático generalmente es considerablemente más largo que este incremento de tiempo.

Si la historia de carga es simple, la selección del intervalo dependerá esencialmente del periodo de vibración de la estructura para proveer una precisión razonable.

7.2.1.1 Algoritmo de Aplicación.

1. Cálculos iniciales

1.1 Resolver $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 = [\mathbf{p}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_{s(0)}]$ para determinar $\ddot{\mathbf{u}}_0$

1.2 Seleccionar Δt

1.3 $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + (3 / \Delta t) \mathbf{C} + (6 / (\Delta t)^2) \mathbf{M}$

$$1.4 \quad \mathbf{a} = (6 / \Delta t) \mathbf{M} + 3 \mathbf{C}, \quad \mathbf{b} = 3 \mathbf{M} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}$$

2. Cálculos para cada paso de tiempo

$$2.1 \quad \Delta \mathbf{p}_i^* = \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{a} \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{b} \ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.2 \quad \text{Obtención de } \Delta \mathbf{u}_i \text{ resolviendo } \mathbf{K}^* \Delta \mathbf{u}(t) = \Delta \mathbf{p}_i^*(t)$$

$$2.3 \quad \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = (3 / \Delta t) \Delta \mathbf{u}_i - 3 \dot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.4 \quad \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = (6 / \Delta t^2) \Delta \mathbf{u}_i - (6 / \Delta t) \dot{\mathbf{u}}_i - 3 \ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.5 \quad \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}}_i, \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i,$$

3. Para el siguiente paso de tiempo se reemplaza a \mathbf{i} por $\mathbf{i} + 1$ y se repite el paso 2.

Como se mencionó anteriormente, con este procedimiento se obtienen resultados con considerable grado de exactitud en sistemas lineales.

Observaciones:

En ciertos casos de sistemas en los que los modos de vibrar significativos sean pocos, se pueden determinar, y convertir la ecuación de movimiento a coordenadas generalizadas respecto a la matriz espectral; lo que implica utilizar la ecuación (7.46)

$$(\mathbf{q}_n)_0 = \frac{\Phi_n^t \mathbf{M} \mathbf{u}_0}{\Phi_n^t \mathbf{M} \Phi_n} \quad (\dot{\mathbf{q}}_n)_0 = \frac{\Phi_n^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_0}{\Phi_n^t \mathbf{M} \Phi_n}$$

Una vez determinas las coordenadas generalizadas se obtienen los desplazamientos mediante la expansión modal abordada anteriormente.

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^N \phi_j q_j = \Phi \mathbf{q}(t)$$

Considerando lo antes expuesto, al algoritmo se le efectúan los siguientes cambios:

- 1.- Determinar las coordenadas generalizadas correspondientes.
- 2.- Determinar la carga generalizada $P_0 = \Phi^T p_0$, previo al paso 1.2. Se requiere hacer la misma determinación para la carga P_i considerada como paso 2.1.
- 3.- Los pasos siguientes quedarán en función de las coordenadas generalizadas.
- 4.- Para determinar la respuesta real se requiere hacer la conversión

$$u_{i+1} = \Phi q_{i+1}, \quad \dot{u}_{i+1} = \Phi \dot{q}_{i+1}, \quad \ddot{u}_{i+1} = \Phi \ddot{q}_{i+1}$$

Cabe mencionar que la ventaja del proceso descrito anteriormente, puede ser sustituida por la velocidad con la que los procesadores en la actualidad manejan la información, lo cual genera que en muchas ocasiones no se justifique este trabajo adicional y se opte por el procedimiento original.

7.2.1.2 Evaluación numérica.

A continuación, para ejemplificar el método, se presenta la resolución de un sistema estructural con amortiguamiento y comportamiento lineal.

La resolución se realizó con la ayuda de la hoja de cálculo Excel 2003, siguiendo el algoritmo antes presentado.

EJEMPLO:

Un edificio idealizado como se muestra en la figura 7.8, se encuentra bajo la acción de una fuerza en su nivel superior. La fuerza tiene una magnitud de $p(t) = 1556.8 \text{ kN}$, la masa y la rigidez lateral en cada piso son de $m = 45331 \text{ kg}$ (45.331 ton.) y $k = 6223.7 \text{ kN/m}$, respectivamente. Se requiere determinar la respuesta del sistema. Considérese $\Delta t = 0.1 \text{ seg.}$ y razón de amortiguamiento en cada piso $\xi = 5 \%$.

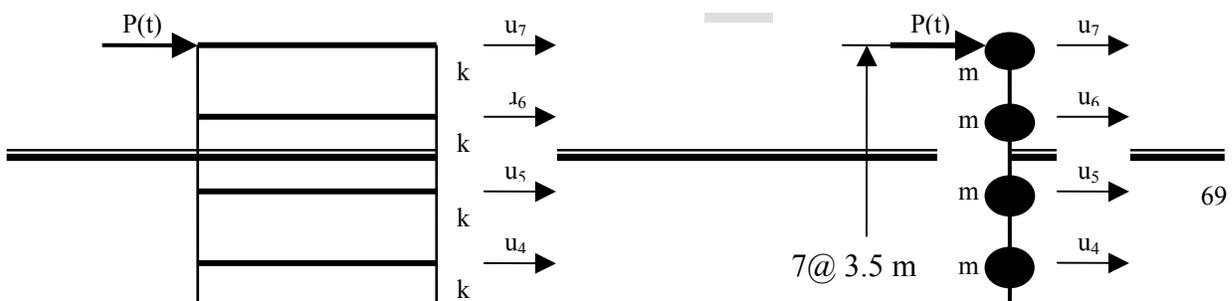


Fig. 7.8. Modelo de la estructura ejemplo a) Marco del sistema b) Idealización con masas concentradas

La matriz de rigidez obtenida para este sistema es:

$$\mathbf{K} = 6223.7 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de amortiguamiento correspondiente es:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 72.1296 & -20.6272 & -3.46193 & -41.28926 & -0.65903 & -0.41705 & -0.335111 \\ & 68.6677 & -21.9165 & -4.12096 & -1.71097 & -0.994144 & -0.756817 \\ & & 68.0086 & -22.3382 & -4.45607 & -2.04608 & -1.415850 \\ & *simétrica* & & 67.6735 & -22.6733 & -4.87778 & -2.705110 \\ & & & & 67.2518 & -23.3323 & -6.167040 \\ & & & & & 65.9626 & -26.7942 \\ & & & & & & 45.3354 \end{bmatrix}$$

Y las matrices de masas y de cargas:

$$\mathbf{M} = 45.331 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1556.8 \end{bmatrix}$$

1.- Cálculos iniciales.

Se consideran como condiciones iniciales $\mathbf{u}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = 0$ y $\ddot{\mathbf{u}}(0) = 0$ por lo que no es necesario resolver $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 = [\mathbf{p}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_{s(0)}]$. La carga actúa en un incremento de tiempo, por tanto $\mathbf{p}(0) = 0$ y $\mathbf{p}(\Delta t) = 1556.8 \text{ kN}$; $\Delta t = 0.1 \text{ seg}$.

Sustituyendo \mathbf{K} , \mathbf{M} , Δt y \mathbf{C} en las expresiones del algoritmo se obtiene

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + (3 / \Delta t_i)\mathbf{C} + (6 / (\Delta t_i)^2)\mathbf{M} = \mathbf{K} + 30\mathbf{C} + 600\mathbf{M}$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 41809.89 & -6842.516 & -103.8579 & -38.67780 & -19.77102 & -12.65115 & -10.05333 \\ & 41706.03 & -6881.195 & -123.6288 & -51.32910 & -29.82432 & -22.70451 \\ & & 41686.26 & -6893.846 & -133.6821 & -61.38240 & -42.4755 \\ & & & 41676.21 & -6903.899 & -146.3334 & -81.1533 \\ & & & & 41663.55 & -6923.669 & -185.0112 \\ & & & & & 41624.88 & -7027.526 \\ & & & & & & 34782.36 \end{bmatrix}$$

simétrica

$$\mathbf{a} = (6 / \Delta t) \mathbf{M} + 3 \mathbf{C} = 60 \mathbf{M} + 3 \mathbf{C}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2936.249 & -61.88160 & -10.38579 & -3.867780 & -1.977102 & -1.265115 & -1.005333 \\ & 2925.863 & -65.74950 & -12.36288 & -5.132910 & -2.982432 & -2.270451 \\ & & 2923.886 & -67.01460 & -13.36821 & -6.138240 & -4.24755 \\ & & & 2922.880 & -68.01990 & -14.63334 & -8.11533 \\ & & & & 2921.615 & -69.99690 & -18.50112 \\ & & & & & 2917.748 & -80.3826 \\ & & & & & & 2855.866 \end{bmatrix}$$

simétrica

$$\mathbf{b} = 3 \mathbf{M} + \frac{1}{2} \mathbf{C} \Delta t = 3 \mathbf{M} + 0.05 \mathbf{C}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 139.5995 & -1.031360 & -0.173096 & -0.064463 & -0.032952 & -0.021085 & -0.016755 \\ & 139.4264 & -1.095825 & -0.206048 & -0.085548 & -0.049707 & -0.037841 \\ & & 139.3934 & -1.116910 & -0.222803 & -0.102304 & -0.070792 \\ & & & 139.3767 & -1.133665 & -0.243889 & -0.135255 \\ & & & & 139.3556 & -1.166615 & -0.308352 \\ & & & & & 139.2911 & -1.339710 \\ & & & & & & 138.2598 \end{bmatrix}$$

simétrica

2.- Cálculos para cada paso de tiempo.

Primera iteración

$$\Delta \mathbf{p}_i^* = \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{a} \mathbf{u}_i + \mathbf{b} \mathbf{u}_i$$

Donde:

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1556.8 \end{bmatrix} \quad \text{y para } \Delta \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{siendo } i > 1, \quad \text{por tanto } \Delta \mathbf{p}_i^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1556.8 \end{bmatrix}$$

Se obtiene $\Delta \mathbf{u}_i$ resolviendo $\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{u}(t) = \Delta \mathbf{p}^*(t)$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.0000025 \\ 0.0000062 \\ 0.0001427 \\ 0.0004113 \\ 0.0016219 \\ 0.0081062 \\ 0.0464059 \end{bmatrix}, \quad \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = (3 / \Delta t) \Delta \mathbf{u}_i - 3 \dot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.0007576 \\ 0.0018591 \\ 0.0042820 \\ 0.0123394 \\ 0.0486559 \\ 0.2431857 \\ 1.3921777 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = (6 / \Delta t^2) \Delta \mathbf{u}_i - (6 / \Delta t) \dot{\mathbf{u}}_i - 3 \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.0151530 \\ 0.0371814 \\ 0.0856410 \\ 0.2467886 \\ 0.9731186 \\ 4.8637145 \\ 27.843554 \end{bmatrix}$$

Por tanto la respuesta del sistema es:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.0000025 \\ 0.0000062 \\ 0.0001427 \\ 0.0004113 \\ 0.0016219 \\ 0.0081062 \\ 0.0464059 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.0007576 \\ 0.0018591 \\ 0.0042820 \\ 0.0123394 \\ 0.0486559 \\ 0.2431857 \\ 1.3921777 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.0151530 \\ 0.0371813 \\ 0.0856410 \\ 0.2467886 \\ 0.9731186 \\ 4.8637145 \\ 27.843554 \end{bmatrix}$$

Para la obtención de la respuesta en los pasos siguientes se repiten el procedimiento desde 2.2 hasta 2.7, de acuerdo al algoritmo correspondiente.

Segunda iteración

$$\Delta \mathbf{p}_i^* = \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{a}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{b}\ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 1.6590700 \\ 4.4676055 \\ 12.439958 \\ 45.824518 \\ 219.51449 \\ 1232.9923 \\ 7798.0881 \end{bmatrix}$$

$\Delta \mathbf{u}_i$ se obtiene resolviendo $\mathbf{K}^*(t) \Delta \mathbf{u}(t) = \Delta \mathbf{p}^*(t)$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.0002440 \\ 0.0006500 \\ 0.0016993 \\ 0.0053174 \\ 0.0193887 \\ 0.0732375 \\ 0.2391118 \end{bmatrix}, \quad \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = (3 / \Delta t) \Delta \mathbf{u}_i - 3 \dot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.0042886 \\ 0.0120543 \\ 0.0338504 \\ 0.1101636 \\ 0.3870366 \\ 1.2243825 \\ 1.6046445 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = (6 / \Delta t^2) \Delta \mathbf{u}_i - (6 / \Delta t) \dot{\mathbf{u}}_i - 3 \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.0554654 \\ 0.1667241 \\ 0.5057263 \\ 1.7096958 \\ 5.7944941 \\ 14.760222 \\ -23.594219 \end{bmatrix}$$

Por tanto la respuesta para la segunda iteración es:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.0002692 \\ 0.0007117 \\ 0.0018420 \\ 0.0057287 \\ 0.0210105 \\ 0.0813437 \\ 0.2855178 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.0050462 \\ 0.0139134 \\ 0.0381325 \\ 0.1225031 \\ 0.4356925 \\ 1.4675683 \\ 2.9968222 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.0706184 \\ 0.2039055 \\ 0.5913673 \\ 1.9564844 \\ 6.7676127 \\ 19.623936 \\ 4.2493351 \end{bmatrix}$$

Así sucesivamente se van realizando las iteraciones durante el tiempo de estudio considerado.

En la siguiente tabla se presentan los desplazamientos de cada uno de los pisos como respuesta del sistema; se consideran hasta tres iteraciones, redondeadas a cinco dígitos.

| Paso de tiempo | u₁ | u₂ | u₃ | u₄ | u₅ | u₆ | u₇ |
|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0.1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0016 | 0.0081 | 0.0464 |
| 0.2 | 0.0003 | 0.0007 | 0.0018 | 0.0057 | 0.0210 | 0.0813 | 0.2855 |
| 0.3 | 0.0015 | 0.0023 | 0.0122 | 0.0372 | 0.1142 | 0.3101 | 0.5907 |

Tabla 7.1. Respuesta obtenida mediante el método de la aceleración lineal

Instituto de Ingen
Tesis de Maestría
Universidad Veraci
Ing. Francisco de Jesús

7.2.2 Método de la aceleración promedio.

Al igual que el método de la aceleración lineal, esta es una alternativa que puede ser tan exacta como se desee y puede ser usada para determinar la respuesta de sistemas lineales o no lineales, mediante una resolución paso a paso usando incrementos de tiempo Δt_i .

La base del método consiste en la suposición de que la aceleración permanece constante en cualquier instante de tiempo.

En forma similar al método de aceleración lineal, la aplicación del método es la siguiente:

Dadas las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} y el vector $\Delta \mathbf{P}$, se obtiene la aceleración inicial mediante la expresión

$$\ddot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{p}(0) - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(0) - \mathbf{K} \mathbf{u}(0)]$$

O bien, tomando en cuenta como condiciones iniciales a $\ddot{\mathbf{u}}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = 0$.

Se selecciona el paso de tiempo de estudio Δt y mediante las expresiones siguientes se determinan las rigideces del sistema y los incrementos de carga

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + 2 \mathbf{C} / \Delta t + 4 \mathbf{M} / (\Delta t)^2$$

$$\Delta \mathbf{P}_i^* = \Delta \mathbf{P}_i + [4 \mathbf{M} / (\Delta t)^2 + 2 \mathbf{C}] \dot{\mathbf{u}}_i + 2 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_i$$

De donde se obtiene el desplazamiento:

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{K}^*)^{-1} \Delta \mathbf{P}^*(t)$$

El cual se utiliza para determinar :

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = (2 / \Delta t_i) \Delta \mathbf{u}_i - 2 \dot{\mathbf{u}}_i$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}} = 4 \Delta \mathbf{u} / (\Delta t_i)^2 - 4 \dot{\mathbf{u}}_i / \Delta t - 2 \ddot{\mathbf{u}}_i$$

Sustituyendo en:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}} \quad \text{y} \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}$$

Haciendo un proceso iterativo en las expresiones anteriores, se determina la respuesta del sistema para un tiempo determinado.

Este método resulta estable para cualquier valor de Δt sin importar que tan largo sea; sin embargo, tiene considerable exactitud si Δt es lo suficientemente pequeño. Debido a que el tamaño del paso de tiempo no resulta una limitante, se dice que este método es *incondicionalmente estable*.

Una “regla de fuego” para asegurar la estabilidad del método, es que el paso de tiempo seleccionado Δt , debe satisfacer la condición $\Delta t \leq T / 10$, siendo T el menor periodo de la excitación o de cualquiera de los periodos naturales T_n , siendo $T_n = 2 \pi / \omega_n$ (Clough y Penzie, 1993).

Este procedimiento proporciona muy buenas aproximaciones en su resultado, tanto en sistemas lineales como no lineales ya que las derivadas que van apareciendo en el sistema de ecuaciones de movimiento van generando una solución paso a paso basadas en la consideración de una aceleración promedio entre cada paso de tiempo. De acuerdo a lo anterior, no se producen amplitudes de error (no existe *disipación numérica*), aunque puede presentar un alargamiento en su periodo (*porcentaje de elongación*) el cual no es significativo, independientemente del paso de tiempo considerado, lo que hace que el procedimiento resulte ser el más eficiente para expresar la respuesta en términos de un conjunto truncado de coordenadas modales sin amortiguamiento, además de permitir la integración directa de las ecuaciones resultantes.

7.2.2.1 Algoritmo de aplicación.

1. Cálculos iniciales

1.1 Resolver $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_{s(0)}$ para determinar $\ddot{\mathbf{u}}_0$

1.2 Seleccionar Δt

$$1.3 \quad \mathbf{a} = (4 / \Delta t) \mathbf{M} + 2 \mathbf{C} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = 2 \mathbf{M}$$

$$1.4 \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{K} + 2\mathbf{C} / \Delta t + 4\mathbf{M} / (\Delta t)^2$$

2. Cálculo para cada paso de tiempo

$$2.1 \quad \Delta \mathbf{p}_i^* = \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{a} \mathbf{u}_i + \mathbf{b} \ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.2 \quad \text{Obtención de } \Delta \mathbf{u} \text{ mediante } \mathbf{K}^* \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{p}(t)$$

$$2.3 \quad \Delta \dot{\mathbf{u}} = (2 / \Delta t) \Delta \mathbf{u}_i - 2 \dot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.4 \quad \ddot{\mathbf{u}}_i = 4\Delta \mathbf{u} / (\Delta t)^2 - 4\dot{\mathbf{u}}_i / \Delta t - 2\ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.5 \quad \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}} \quad \text{y} \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}$$

3. Para el siguiente paso de tiempo se reemplaza a i por $i+1$ y se repite el paso 2.

Observaciones:

Para el caso de sistemas no lineales, el procedimiento arriba descrito sufre los siguientes cambios:

1. Se deberá determinar la matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t (no considerada en el algoritmo anterior) y ocupará el paso 2.2 debido a que ahora la matriz de rigideces varía con el tiempo.
2. La matriz tangente se sustituirá en la ecuación 1.4 que ahora ocuparía el paso 2.3
3. El paso actual 2.2 ocupará el lugar 2.4, solo que ahora se tomará en cuenta un proceso de iteración para aproximar la rigidez tangente a la rigidez secante, este proceso se logra implementando el método de Newton-Rapson modificado sugerido por Chopra, Anil K. (2001).
4. Los pasos 2.3 a 2.5 se recorrerán y pasarán a ser en forma correspondiente, los pasos 2.5 a 2.7.

7.2.2.2 Evaluación numérica.

Se presentan nuevamente los datos del problema ejemplo

Datos:

$$m = 45.331 \text{ ton.}$$

$$h = 3.5 \text{ m}$$

$$k = 6223.7 \text{ kN/m}$$

$$\Delta t = 0.1 \text{ s}$$

$$\xi = 0.05$$

La matriz de rigidez obtenida para este sistema es:

$$\mathbf{K} = 6223.7 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de amortiguamiento correspondiente es:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 72.1296 & -20.6272 & -3.46193 & -41.28926 & -0.65903 & -0.41705 & -0.335111 \\ & 68.6677 & -21.9165 & -4.12096 & -1.71097 & -0.994144 & -0.756817 \\ & & 68.0086 & -22.3382 & -4.45607 & -2.04608 & -1.415850 \\ & *simétrica* & & 67.6735 & -22.6733 & -4.87778 & -2.705110 \\ & & & & 67.2518 & -23.3323 & -6.167040 \\ & & & & & 65.9626 & -26.7942 \\ & & & & & & 45.3354 \end{bmatrix}$$

Y las matrices de masa y de carga:

$$\mathbf{M} = 45.331 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1556.8 \end{bmatrix}$$

1.- Cálculo inicial.

Al igual que el método de aceleración lineal, las condiciones iniciales son $\mathbf{u}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = 0$ y $\ddot{\mathbf{u}}(0) = 0$, por lo que no es necesario resolver la expresión $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 = [\mathbf{p}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_{s(0)}]$; la carga actúa en un incremento de tiempo, por tanto $\mathbf{p}(0) = 0$ y $\mathbf{p}(\Delta t) = 1556.8 \text{ kN}$; $\Delta t = 0.1 \text{ seg}$.

$$\mathbf{a} = (4 / \Delta t) \mathbf{M} + 2 \mathbf{C} = 40 \mathbf{M} + 2 \mathbf{C}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1957.499 & -41.2544 & -6.92386 & -2.57852 & -1.31807 & -0.84341 & -0.67022 \\ & 1950.57 & -43.8330 & -8.24192 & -3.42194 & -1.98829 & -1.51363 \\ & & 1949.26 & -44.6764 & -8.91214 & -4.09216 & -2.8317 \\ & & & 1948.58 & -45.3466 & -9.75556 & -5.41022 \\ & & & & 1947.74 & -46.6646 & -12.3340 \\ & & & & & 1945.16 & -53.5884 \\ & & & & & & 1903.91 \end{bmatrix}$$

simétrica

$$\mathbf{b} = 2 \mathbf{M} = 90.662 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al tratarse de un problema lineal, \mathbf{K} es constante, por tanto:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + 2\mathbf{C}/\Delta t + 4\mathbf{M}/(\Delta t)^2 = \mathbf{K} + 20\mathbf{C} + 400\mathbf{M}$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 32022.4 & -6636.24 & -69.2386 & -25.7852 & -13.1807 & -8.43410 & -6.70222 \\ & 31953.1 & -6662.03 & -82.4192 & -34.2194 & -19.8829 & -15.1363 \\ & & 31939.9 & -6670.46 & -89.1214 & -40.9216 & -28.317 \\ & & & 31933.3 & -6677.17 & -97.5556 & -54.1022 \\ & & & & 31924.8 & -6690.35 & -123.341 \\ & & & & & 31899.0 & -6759.58 \\ & & & & & & 25262.8 \end{bmatrix}$$

simétrica

2.- Cálculos para cada paso de tiempo.

Primera iteración

$$\Delta \mathbf{p}_i^* = \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{a} \mathbf{u}_i + \mathbf{b} \ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$\Delta \mathbf{p}_i^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1556.8 \end{bmatrix}, \quad \text{Donde } \Delta \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1556.8 \end{bmatrix}, \quad \text{y para } \Delta \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ siendo } i > 1$$

Obtención de $\Delta \mathbf{u}_i$ mediante $\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{u}(t) = \Delta \mathbf{P}(t)$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.0000455 \\ 0.0001209 \\ 0.000312 \\ 0.0009576 \\ 0.0035215 \\ 0.0146344 \\ 0.0655596 \end{bmatrix}, \quad \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = (2 / \Delta t) \Delta \mathbf{u}_i - 2 \dot{\mathbf{u}}_i = 20 \Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.0009106 \\ 0.0024182 \\ 0.0062403 \\ 0.0191527 \\ 0.0704294 \\ 0.2926886 \\ 1.3111922 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = (4\Delta \mathbf{u}_i / \Delta t^2) - (4\dot{\mathbf{u}}_i / \Delta t) - 2\ddot{\mathbf{u}}_i = 400 \Delta \mathbf{u}_i - 40 \dot{\mathbf{u}}_i - 2 \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.018211 \\ 0.048365 \\ 0.124805 \\ 0.383054 \\ 1.408589 \\ 5.853773 \\ 26.22384 \end{bmatrix}$$

Por tanto la respuesta del sistema es:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.0000455 \\ 0.0001209 \\ 0.000312 \\ 0.0009576 \\ 0.0035215 \\ 0.0146344 \\ 0.0655596 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.0009106 \\ 0.0024182 \\ 0.0062403 \\ 0.0191527 \\ 0.0704294 \\ 0.2926886 \\ 1.3111922 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.018211 \\ 0.048365 \\ 0.124805 \\ 0.383054 \\ 1.408589 \\ 5.853773 \\ 26.22384 \end{bmatrix}$$

Para la obtención de la respuesta en los pasos siguientes se repiten el procedimiento desde 2.1 hasta 2.7 de acuerdo al algoritmo correspondiente

Segunda iteración

$$\Delta \mathbf{p}_i^* = \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{a} \mathbf{u}_i + \mathbf{b} \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 2.022701 \\ 5.825241 \\ 16.97271 \\ 58.60526 \\ 234.1198 \\ 1026.273 \\ 4857.220 \end{bmatrix}$$

Obtención de $\Delta \mathbf{u}_i$ mediante $\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{u}(t) = \Delta \mathbf{P}(t)$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.000380 \\ 0.001088 \\ 0.002978 \\ 0.008833 \\ 0.027516 \\ 0.083485 \\ 0.214763 \end{bmatrix}, \quad \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = (2 / \Delta t) \Delta \mathbf{u}_i - 2 \dot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.005789 \\ 0.016927 \\ 0.047079 \\ 0.138350 \\ 0.409456 \\ 1.084315 \\ 1.672876 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = 400 \Delta \mathbf{u}_i - 40 \dot{\mathbf{u}}_i - 2 \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.079349 \\ 0.241803 \\ 0.691978 \\ 2.000901 \\ 5.371941 \\ 9.978754 \\ -18.99017 \end{bmatrix}$$

Por tanto la respuesta del sistema es:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.000426 \\ 0.001209 \\ 0.003290 \\ 0.009790 \\ 0.031037 \\ 0.098119 \\ 0.280322 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.006699 \\ 0.019345 \\ 0.053320 \\ 0.157503 \\ 0.479885 \\ 1.377004 \\ 2.984068 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.097560 \\ 0.290167 \\ 0.816784 \\ 2.383956 \\ 6.780530 \\ 15.83253 \\ 7.233669 \end{bmatrix}$$

De ésta manera y en forma sucesiva se determina la respuesta de la estructura para todo el tiempo de estudio considerado

En la siguiente tabla se presenta los desplazamientos de cada uno de los pisos como respuesta del sistema, se consideran hasta tres iteraciones, redondeadas a cinco dígitos.

| Pasos de tiempo | u ₁ | u ₂ | u ₃ | u ₄ | u ₅ | u ₆ | u ₇ |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0.1 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0009 | 0.0035 | 0.0146 | 0.0656 |
| 0.2 | 0.0004 | 0.0012 | 0.0033 | 0.0097 | 0.0314 | 0.0981 | 0.2803 |
| 0.3 | 0.0023 | 0.0068 | 0.0183 | 0.0493 | 0.1293 | 0.3065 | 0.5843 |

Tabla 7.2.Respuesta obtenida mediante el método de la aceleración promedio

7.2.3 Método de Wilson.

Como se mencionó anteriormente, este método surge como una modificación del método de aceleración lineal. En éste se supone que la aceleración varía linealmente sobre el intervalo de tiempo de t a $t + \theta \Delta t$.

En forma equivalente a un sistema con un solo grado de libertad, la ecuación de movimiento del sistema con varios grados de libertad en forma matricial queda expresada como

$$\mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K} \delta \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{P}_i$$

Donde δ indica que los incrementos se asocian con el paso de tiempo extendido $\theta \Delta t$. De manera semejante a los métodos anteriores, conocidas las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} y el vector $\Delta \mathbf{P}$, se obtiene la aceleración inicial mediante la expresión

$$\ddot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{p}(0) - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(0) - \mathbf{K} \mathbf{u}(0)]$$

O bien, tomando en cuenta como condiciones iniciales a

$$\ddot{\mathbf{u}}(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(0) = 0.$$

Se selecciona el paso de tiempo de estudio Δt y se determinan las rigideces \mathbf{K}^* del sistema, así como los incrementos de carga, mediante las expresiones

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + [3 / (\theta \Delta t)] \mathbf{C} + [6 / (\theta \Delta t)^2] \mathbf{M}$$

$$\delta \mathbf{p}_i^* = \theta \Delta \mathbf{p}_i + \left(\frac{6}{(\theta \Delta t)} \mathbf{M} + 3 \mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{u}}_i + \left(3 \mathbf{M} + \frac{1}{2} (\theta \Delta t) \mathbf{C} \right) \ddot{\mathbf{u}}_i$$

Con los cuales se determina $\delta \mathbf{u}$

$$\delta \mathbf{u} = (\mathbf{K}^*)^{-1} \delta \mathbf{p}_i$$

Con lo que:

$$\delta \ddot{\mathbf{u}} = 6 \delta \dot{\mathbf{u}}_i / (\theta \Delta t)^2 - 6 \ddot{\mathbf{u}}_i / (\theta \Delta t) - 3 \ddot{\mathbf{u}}_i.$$

Haciendo $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \delta \ddot{\mathbf{u}}_i / \theta$

Se obtienen, en forma semejante a las ecuaciones (7.40) y (7.38):

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{2} \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i$$

Para luego determinar la respuesta del sistema en el paso considerado, de la forma:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}} \quad \text{y} \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}$$

El método es apropiado para este tipo de sistemas ya que provee propiedades de disipación numérica para el amortiguamiento de altos modos, como es el caso de modos para los cuales $(\Delta t / T_n) \geq 1.0$. Su estabilidad radica en el valor de θ , que se determina para establecer la estabilidad óptima del proceso numérico, así como la exactitud de la solución, de tal manera que si $\theta = 1$, da como resultado el método de aceleración lineal, el cual es estable si $\Delta t < 0.551 T_n$. Si $\theta \geq 1.37$, el método es *incondicionalmente estable*, sin embargo, aunque el valor óptimo de θ es de 1.4208015, generalmente se utiliza $\theta = 1.42$.

Este procedimiento puede generar alargamientos artificiales del periodo, y reducción de amplitud introducidos por la integración numérica, los cuales dependerán tanto de las características de la carga dinámica como de la longitud del paso del tiempo.

El mecanismo de decaimiento puede considerarse como un amortiguamiento artificial el cual se agrega al amortiguamiento real existente. Ambos efectos, periodo de elongación y decaimiento de amplitud pueden llegar a ser importantes en ciertos casos, pero generalmente el decaimiento de amplitud puede ser más significativo. Sin embargo este efecto puede considerarse deliberadamente equivalente al truncamiento modal aplicado en el método de superposición modal. Obviamente el decaimiento de amplitud no es un factor serio en comparación con la omisión de algún modo de vibrar que no haya sido tomado en cuenta al utilizar el método de superposición modal (Clough y Penzien, 1993).

7.2.3.1 Algoritmo de aplicación.

1. Cálculo inicial.

- 1.1 Resolver $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0$ para determinar $\ddot{\mathbf{u}}_0$
- 1.2 Se selecciona Δt y θ
- 1.3 Se hace $\mathbf{a} = (6 / \theta \Delta t) \mathbf{M} + 3 \mathbf{C}$ y $\mathbf{b} = 3 \mathbf{M} + \frac{1}{2} (\theta \Delta t) \mathbf{C}$
- 1.4 $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + 3 \mathbf{C} / (\theta \Delta t) + 6 \mathbf{M} / (\theta \Delta t)^2$

2. Cálculo para cada paso de tiempo.

- 2.1 $\delta \mathbf{p}_i^* = \theta \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{a} \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{b} \ddot{\mathbf{u}}_i$
- 2.2 Resolver para determinar $\delta \mathbf{u}_i$ mediante $\mathbf{K}^* \delta \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{p}_i^*$
- 2.3 $\delta \ddot{\mathbf{u}}_i = 6 \delta \mathbf{u}_i / (\theta \Delta t)^2 - 6 \dot{\mathbf{u}}_i / (\theta \Delta t) - 3 \ddot{\mathbf{u}}_i$; y $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \delta \ddot{\mathbf{u}}_i / \theta$
- 2.4 $\Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{2} \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i$ y $\Delta \mathbf{u}_i = \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i$
- 2.5 $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}}_i$, $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i$,

3. Para el siguiente paso de tiempo se reemplaza a i por $i + 1$ y se repite el paso 2.

Observaciones:

Para la utilización de este procedimiento en sistemas no lineales deberán hacerse los siguientes ajustes:

1. Se determinará la matriz de rigidez tangente, ya que ésta variará en cada paso de tiempo. Esta operación ocupará el paso 2.2.
2. El paso 1.4 pasará a ser el 2.3, debido a que la matriz de rigidez varía en cada paso de tiempo.
3. El paso 2.3 pasará a ser el 2.4 solo que ahora se determinará mediante el proceso iterativo de Newton- Raphson modificado (Chopra, 2001).
4. Los pasos 2.3 a 2.5 se recorrerán en forma correspondiente a los pasos 2.5 a 2.7.

7.2.3.2 Evaluación numérica.

Se resuelve el problema anterior ahora por el método de Wilson partiendo de los datos dados.

$m = 45.331 \text{ ton.}$

$h = 3.5 \text{ m}$

$k = 6223.7 \text{ kN/m}$

$\Delta t = 0.1 \text{ s}$

$\xi = 0.05$

La matriz de rigidez obtenida para este sistema es:

$$\mathbf{K} = 6223.7 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de amortiguamiento correspondiente es:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 72.1296 & -20.6272 & -3.46193 & -41.28926 & -0.65903 & -0.41705 & -0.335111 \\ & 68.6677 & -21.9165 & -4.12096 & -1.71097 & -0.994144 & -0.756817 \\ & & 68.0086 & -22.3382 & -4.45607 & -2.04608 & -1.415850 \\ & & & 67.6735 & -22.6733 & -4.87778 & -2.705110 \\ & & & & 67.2518 & -23.3323 & -6.167040 \\ & & & & & 65.9626 & -26.7942 \\ & & & & & & 45.3354 \end{bmatrix}$$

simétrica

Y las matrices de masas y de cargas:

$$\mathbf{M} = 45.331 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1556.8 \end{bmatrix}$$

1. Cálculos iniciales.

Al igual que en los métodos anteriores, las condiciones iniciales son $\mathbf{u}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = 0$ y $\ddot{\mathbf{u}}(0) = 0$, por lo que no es necesario resolver $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 = [\mathbf{p}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_{s(0)}]$. La carga actúa en un incremento de tiempo, por tanto $\mathbf{p}(0) = 0$ y $\mathbf{p}(\Delta t) = 1556.8 \text{ kN}$; $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ y $\theta = 1.420815$

Se hace $\mathbf{a} = (6 / \theta \Delta t) \mathbf{M} + 3 \mathbf{C} = 42.23 \mathbf{M} + 3 \mathbf{C}$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2130.68 & -61.8816 & -10.3858 & -3.86778 & -1.97710 & -1.26511 & -1.00533 \\ & 2120.30 & -65.7495 & -12.3629 & -5.13291 & -2.98243 & -2.27045 \\ & & 2118.32 & -67.0146 & -13.3682 & -6.13824 & -4.24755 \\ & & & 2117.32 & -68.0199 & -14.6333 & -8.11533 \\ & & & & & 2116.05 & -69.9969 & -18.5011 \\ & & & & & & 2112.18 & -80.3826 \\ & & & & & & & 2050.32 \end{bmatrix}$$

simétrica

$$\mathbf{b} = 3 \mathbf{M} + \frac{1}{2} \theta \Delta t \mathbf{C} = 3 \mathbf{M} + 0.071 \mathbf{C}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 141.117 & -1.46537 & -0.24594 & -0.09159 & -0.04682 & -0.02996 & -0.02381 \\ & 140.871 & -1.55696 & -0.29276 & -0.12155 & -0.07062 & -0.05376 \\ & & 140.824 & -1.58692 & -0.31656 & -0.14535 & -0.10058 \\ & & & 140.801 & -1.61073 & -0.34652 & -0.19217 \\ & & & & 140.771 & -1.65754 & -0.43811 \\ & & & & & 140.679 & -1.90348 \\ & & & & & & 139.214 \end{bmatrix}$$

simétrica

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + 3 \mathbf{C} / (\theta \Delta t) + 6 \mathbf{M} / (\theta \Delta t)^2 = \mathbf{K} + 21.1146 \mathbf{C} + 297.2 \mathbf{M}$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 27443.61 & -6659.236 & -73.09741 & -27.22226 & -13.91527 & -8.904150 & -7.075748 \\ & 27370.52 & -6686.459 & -87.01259 & -36.12652 & -20.99099 & -15.97992 \\ & & 27356.599 & -6695.363 & -94.08832 & -43.20225 & -29.89516 \\ & & & 27349.52 & -6702.439 & -102.9926 & -57.11743 \\ & & & & 27340.62 & -6716.353 & -130.2148 \\ & & & & & 27313.40 & -6789.450 \\ & & & & & & 20654.16 \end{bmatrix}$$

simétrica

2.- Cálculo para cada paso de tiempo.

Primera iteración

$$\delta \mathbf{p}_i^* = \theta \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{a} \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{b} \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2211.925 \end{bmatrix} \quad \text{Donde } \Delta \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2211.925 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$\Delta \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ siendo } i > 1, \quad \text{Se obtiene } \delta \mathbf{u}_i \text{ mediante } \mathbf{K}^* \delta \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{p}_i^*$$

$$\delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.000145 \\ 0.000391 \\ 0.000992 \\ 0.002806 \\ 0.008971 \\ 0.031423 \\ 0.117489 \end{bmatrix}, \quad \delta \ddot{\mathbf{u}}_i = 6 \delta \dot{\mathbf{u}}_i / (\theta \Delta t)^2 - 6 \dot{\mathbf{u}}_i / (\theta \Delta t) - 3 \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.043203 \\ 0.116236 \\ 0.294743 \\ 0.834085 \\ 2.666294 \\ 9.339606 \\ 34.91994 \end{bmatrix}$$

haciendo $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \delta \ddot{\mathbf{u}}_i / \theta$ se obtiene:

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \delta \ddot{\mathbf{u}}_i / \theta = \begin{bmatrix} 0.030407 \\ 0.081810 \\ 0.207446 \\ 0.587047 \\ 1.876594 \\ 6.573415 \\ 24.57740 \end{bmatrix}, \quad \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{2} \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.001520 \\ 0.004090 \\ 0.010372 \\ 0.029352 \\ 0.093830 \\ 0.328671 \\ 1.228870 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{u}}_i + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.000051 \\ 0.000136 \\ 0.000346 \\ 0.000978 \\ 0.003128 \\ 0.010956 \\ 0.040962 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.000051 \\ 0.000136 \\ 0.000346 \\ 0.000978 \\ 0.003128 \\ 0.010956 \\ 0.040962 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.001520 \\ 0.004090 \\ 0.010372 \\ 0.029352 \\ 0.093830 \\ 0.328671 \\ 1.228870 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.030407 \\ 0.081810 \\ 0.207446 \\ 0.587047 \\ 1.876594 \\ 6.573415 \\ 24.57740 \end{bmatrix}$$

Para la obtención de la respuesta en los pasos siguientes se repite el procedimiento desde 2.1 hasta 2.7.

Segunda iteración

$$\delta \mathbf{p}_i^* = \theta \Delta \mathbf{p}_i + \mathbf{a} \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{b} \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 4.124693 \\ 12.25364 \\ 35.35410 \\ 112.5090 \\ 392.1313 \\ 1462.966 \\ 5899.142 \end{bmatrix}$$

Obtención de δu_i mediante $K^* \delta u_i = \delta p_i^*$

$$\delta u_i = \begin{bmatrix} 0.001132 \\ 0.003186 \\ 0.008205 \\ 0.021751 \\ 0.058535 \\ 0.151544 \\ 0.335875 \end{bmatrix}, \quad \delta \ddot{u}_i = 6 \delta u_i / (\theta \Delta t)^2 - 6 \dot{u}_i / (\theta \Delta t) - 3 \ddot{u}_i = \begin{bmatrix} 0.181134 \\ 0.528895 \\ 1.378393 \\ 3.464054 \\ 7.805476 \\ 11.44195 \\ -25.7982 \end{bmatrix}$$

haciendo $\Delta \ddot{u}_i = \delta \ddot{u}_i / \theta$ se obtiene

$$\Delta \ddot{u}_i = \delta \ddot{u}_i / \theta = \begin{bmatrix} 0.127486 \\ 0.372247 \\ 0.970143 \\ 2.438075 \\ 5.493661 \\ 8.053090 \\ -18.1573 \end{bmatrix}, \quad \Delta \dot{u}_i = \Delta t \ddot{u}_i + \frac{1}{2} \Delta t \Delta \ddot{u}_i = \begin{bmatrix} 0.009415 \\ 0.026793 \\ 0.069252 \\ 0.180608 \\ 0.462342 \\ 1.059996 \\ 1.549872 \end{bmatrix}$$

$$\Delta u_i = \Delta t \dot{u}_i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{u}_i + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \Delta \ddot{u}_i = \begin{bmatrix} 0.000516 \\ 0.001438 \\ 0.003691 \\ 0.009933 \\ 0.027922 \\ 0.079156 \\ 0.215512 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.000567 \\ 0.001575 \\ 0.004037 \\ 0.010912 \\ 0.031050 \\ 0.090112 \\ 0.256474 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.010935 \\ 0.030884 \\ 0.079624 \\ 0.209961 \\ 0.556173 \\ 1.388667 \\ 2.778742 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} 0.157893 \\ 0.454057 \\ 1.177589 \\ 3.025122 \\ 7.370256 \\ 14.62650 \\ 6.420051 \end{bmatrix}$$

De ésta manera y en forma sucesiva se determina la respuesta de la estructura para todo el tiempo de estudio considerado

En la siguiente tabla se presenta los desplazamientos de cada uno de los pisos como respuesta del sistema, se consideran hasta tres iteraciones, redondeadas a cinco dígitos.

| Pasos de tiempo | u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6 | u_7 |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.1 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0009 | 0.0031 | 0.0109 | 0.0409 |
| 0.2 | 0.0006 | 0.0016 | 0.0040 | 0.0109 | 0.0310 | 0.0901 | 0.2565 |
| 0.3 | 0.0032 | 0.0089 | 0.0221 | 0.0544 | 0.1307 | 0.2931 | 0.5519 |

Tabla 7.3. Respuesta obtenida mediante el método de Wilson

8. PROGRAMACIÓN DE LOS MÉTODOS

En este capítulo se presentan las subrutinas de los métodos de integración directa contemplados, los cuales fueron realizados en lenguaje Fortran 90/95.

El programa está constituido por un programa principal llamado **Métodos**, que llama a cinco subrutinas, las dos primeras son las subrutinas **Jacobitri** y **Amort**. **Jacobitri** resuelve un problema de valores característicos de una matriz diagonal principal, llama a su vez, a una subrutina externa que determina los valores y vectores propios. La subrutina **Amort** determina la matriz de amortiguamiento del sistema mediante las razones de amortiguamiento (versión modificada a fortran 90/95 del programa de Mario Paz). Las otras tres subrutinas determinan la respuesta de una estructura con varios grados de libertad, y son: **Acelin**, que se basa en el método de aceleración lineal. **Acelprom**, en el método de aceleración promedio y **Wilson**, en el método de Wilson.

Para ejecutar el programa el usuario debe proporcionar el nombre del archivo de datos para su lectura, mismo que debe crearse previamente en el “Bloc de notas” de Windows y estar localizado en el directorio raíz “C”, debe también proporcionar la opción del método que desee utilizar para la determinación de la respuesta y, posteriormente, proporcionar el nombre de un archivo en el cual desee almacenar los datos de salida. Los nombres de los archivo de entrada y de salida deben tener como máximo 14 caracteres y extensión “.dat”.

La organización de los datos de entrada deberá ser la siguiente:

- NL (número de grados de libertad)
- PT (paso del tiempo), TMAX (tiempo máximo de análisis)
- PA (porcentajes de amortiguamiento en cada uno de los niveles)
- SM (matriz de masas)
- SK (matriz de rigideces)

VC (vector de cargas)

PROGRAM METODOS

```

! ESTE PROGRAMA DETERMINA LA RESPUESTA DINAMICA DE UNA
! ESTRUCTURA CON MULTIPLES GRADOS DE LIBERTAD MEDIANTE
! EL METODO DE INTEGRACION NUMERICA (ACELERACION LINEAL,
! ACELERACION PROMEDIO Y WILSON)
!
! VARIABLES UTILIZADAS
!
! SM(I,J) = Matriz de masas del sistema
! SK(I,J) = Matriz de rigideces del sistema
! CM(I,J) = Matriz de amortiguamiento
! THETA = Factor Theta de Wilson
! EMOD(I,J)= Matriz modal
! EVAL(I) = Valores propios
! NL = Número de grados de libertad
! VC(I) = Vector de cargas
! PT = Paso de tiempo seleccionado
! DES(I) = Vector desplazamiento
! ACE(I) = Vector aceleración
! VEL(I) = Vector velocidad
! TMAX = Tiempo máximo de calculo
! PA(I) = Porcentajes de amortiguamiento

IMPLICIT NONE

! DECLARACION DE ARGUMENTOS

INTEGER, PARAMETER::DOUBLE=8
REAL(KIND=DOUBLE),ALLOCATABLE, DIMENSION(:)::EVAL
REAL(KIND=DOUBLE),ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)::EMOD
REAL, ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) ::SK, SM, CM
REAL, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: VC, PA
INTEGER :: NL, NOP, I, J
REAL :: PT, TMAX
CHARACTER* 14 ARCHIVO
CHARACTER* 15 RUTA

! ENTRADA DE DATOS

WRITE(*, '(/,T3,A)')'INTRODUZCA EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE ENTRADA'

READ(*,*) archivo
ruta = 'C:\\'//archivo
OPEN(10,FILE=ruta)

READ(10,*) NL

ALLOCATE(SM(NL,NL),SK(NL,NL),CM(NL,NL),EMOD(NL,NL))
ALLOCATE(VC(NL),PA(NL),EVAL(NL))

READ(10,*) PT,TMAX
READ(10,*) (PA(I),I=1,NL)
READ(10,*) ((SM(I,J),I=1,NL),J=1,NL)

```

```

READ(10,*) ((SK(I,J),I=1,NL),J=1,NL)
READ(10,*) (VC(I),I=1,NL)
CLOSE(10)

! SUBROUTINA QUE DETERMINA LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS

CALL JACOBITRI(NL,SK,SM,EVAL,EMOD)

! SUBROUTINA QUE DETERMINA LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO MEDIANTE LAS
! RAZONES DE AMORTIGUAMIENTO

CALL AMORT(NL, EMOD, SM, EVAL, PA, CM)

! SELECCION DEL METODO PARA DETERMINAR LA RESPUESTA

WRITE(*,15)
15 FORMAT(2X,/, 'ELIJA EL No. DEL METODO DE ANÁLISIS DESEADO',/, &
4X, '1', 4X, 'METODO DE ACELERACION LINEAL',/, &
4X, '2', 4X, 'METODO DE ACELERACION PROMEDIO',/, &
4X, '3', 4X, 'METODO DE WILSON',/)

READ(*,*) NOP

IF(NOP ==1)THEN
WRITE(*,20)
20 FORMAT(2X, 'EL METODO ELEGIDO ES :', 3X, 'ACELERACION LINEAL')

CALL ACELIN (NL,PT, TMAX, SM,SK,VC,EVAL,CM)

ELSE IF(NOP ==2)THEN
WRITE (*,30)
30 FORMAT (2X, 'EL METODO ELEGIDO ES :', 3X, 'ACELERACION PROMEDIO')

CALL ACELPROM (NL PT, TMAX,SM, SK,VC,EVAL,CM)

ELSE IF(NOP ==3)THEN
WRITE (*,40)
40 FORMAT (2X, 'EL METODO ELEGIDO ES :', 3X, 'WILSON')
CALL WILSON (NL,PT, TMAX,SM,SK,VC,EVAL,CM)
END IF

END PROGRAM METODOS

SUBROUTINE AMORT (NLL,EM,SMAS,VP,PAM,DM)

IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER ::DOUBLE=8
INTEGER,INTENT(IN):: NLL
REAL,INTENT(IN),DIMENSION( NLL, NLL)::SMAS
REAL(KIND=DOUBLE),INTENT(IN),DIMENSION(NLL)::VP
REAL(KIND=DOUBLE),INTENT(IN),DIMENSION(NLL,NLL)::EM

```

```

REAL,INTENT(IN),DIMENSION(NLL)::PAM
REAL,INTENT(OUT),DIMENSION( NLL, NLL)::DM
REAL,DIMENSION( NLL, NLL)::T
INTEGER::K,I,J
REAL::DA

DO I=1,NLL
  DO J=1,NLL
    DM(I,J)=0.0
  END DO
END DO
DO K=1,NLL
  DA=2*PAM(K)*VP(K)
  DO I=1,NLL
    DO J=1,NLL
      DM(I,J)=DM(I,J)+EM(I,K)*EM(J,K)*DA
    END DO
  END DO
END DO
T= MATMUL (SMAS,DM)
DM = MATMUL (T,SMAS)

END SUBROUTINE AMORT

SUBROUTINE JACOBITRI (N, SKK, SSM, d, VEP)

USE IMSL

INTEGER, PARAMETER:: DOUBLE=8
INTEGER, INTENT (IN)::N
REAL, INTENT (IN), DIMENSION (N,N)::SKK,SSM
REAL (KIND=DOUBLE), INTENT (OUT), DIMENSION(N)::d
REAL (KIND=DOUBLE), INTENT(OUT), DIMENSION(N,N)::VEP
REAL (KIND=DOUBLE), DIMENSION(N,N):: a,v_s,TT,SKR,SM1
INTEGER::I,K,J, IM
REAL(KIND=DOUBLE):: TEMP

FORALL (I=1:N,J=1:N,SSM(I,J)=0.)
  SM1(I,J)= SQRT (1./SSM(I,J))
END FORALL

SKR=MATMUL (SKK,SM1)
a = MATMUL (SM1,SKR)

! LLAMADA DE LA SUBRUTINA QUE CALCULA LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS

CALL d_lin_eig_self (a, d, v=v_s)

VEP = MATMUL (SM1,v_s)
DO I=1,N
  d(I) = DSQRT(d(I))
END DO

```

! SE ORDENAN LAS FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRAR

```
DO I=1,N-1
  DO J=I+1,N
    IF (d(I) > d(J)) THEN
      TEMP= d(I)
      d(I)= d(J)
      d(J) = TEMP
    DO K=1,N
      TT(K,I)= VEP(K,I)
    END DO
    DO IM=1,N
      VEP(IM,I)= VEP(IM,J)
      VEP(IM,J)= TT(IM,I)
    END DO
  END IF
END DO
END DO
```

END SUBROUTINE JACOBITRI

SUBROUTINE ACELIN(N1,PT1,TM1,SM1,SK1,VC1,EV1,CM1)

```
!
! ESTA SUBROUTINA DETERMINA LA RESPUESTA DE UNA ESTRUCTURA MEDIANTE
! EL METODO DE ACELERACION LINEAL
!
```

USE IMSL

! DECLARACION DE ARGUMENTOS

```
REAL, PARAMETER::DOUBLE=8
REAL, PARAMETER :: PI = 3.14152654
INTEGER, INTENT(IN):: N1
REAL, INTENT(IN)::PT1,TM1
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(N1,N1) :: SM1,SK1,CM1
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(N1)::VC1
REAL(KIND=DOUBLE),INTENT(IN),DIMENSION(N1)::EV1
REAL(KIND=DOUBLE),DIMENSION(N1) ::DES1,VEL1,ACE1,DIN1,VIN1,ACIN1,VCCI
REAL(KIND=DOUBLE),DIMENSION(N1,N1) ::A,b,X,SKK1,AC1,BC1
REAL::C1,C2,C3, SUMT1, PER1, EST1,EV
REAL, DIMENSION(N1)::VCI1
INTEGER :: NPT1,I,J
CHARACTER*14 archivo
CHARACTER*15 ruta
```

! SE VERIFICA LA CONDICION DE ESTABILIDAD

```
DO I=1,N1
  EV=DSQRT(EV1(I))
  PER1= (2*PI)/EV
  EST1= 0.551*PER1
```

```

    IF (PT1 > EST1) THEN
      WRITE(*, '(/, 1X, A)') 'LA CONDICION DE ESTABILIDAD NO ES SATISFECHA!'
      STOP
    END IF
  END DO

! INICIALIZACION DE DATOS

C1 = 3.0/PT1
C2 = 6.0/PT1
C3 = C2/PT1
C4 = PT1/2
NPT1 = TM1/PT1
DO I=1, N1
  DES1(I) = 0.0
  VEL1(I) = 0.0
  ACE1(I) = 0.0
END DO
SUMT1 = 0.0

! OBTENCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENCIAL

SKK1 = SK1 + C1*CM1 + C3*SM1
AC1 = C2*SM1 + 3*CM1
BC1 = 3*SM1 + C4*CM1

WRITE(*, *) 'INTRODUZCA EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA'
READ(*, *) archivo
ruta = 'C:\' // archivo
OPEN(7, FILE=ruta)

WRITE(7, '(/, T32, A)') 'METODO DE ACELERACION LINEAL'

WRITE(7, 70)
70 FORMAT(/, 5X, 'LA RESPUESTA ES:', //, 16X, 'TIEMPO', 35X, 'DESPLAZAMIENTOS')

! CÁLCULOS PARA CADA PASO DE TIEMPO

VCI1 = VC1
DO J=1, NPT1
  SUMT1 = SUMT1 + PT1
  VCC1 = VCI1 + MATMUL(AC1, VEL1) + MATMUL(BC1, ACE1)
  VCI1 = 0.0
  A = SKK1
  b = RESHAPE(VCC1, (/N1, N1/))

  CALL d_lin_sol_gen(A, b, x) ! SUBROUTINA QUE RESUELVE EL SISTEMA DE
                              ! ECUACIONES

  DO I=1, N1
    DIN1(I) = X(I, 1)
  END DO

```

```

    VIN1 = C1*DIN1 - 3*VEL1 - C4*ACE1
    ACIN1= C3*DIN1 - C2*VEL1 - 3*ACE1
    DES1 = DES1 + DIN1
    VEL1 = VEL1 + VIN1
    ACE1 = ACE1 + ACIN1

    WRITE(7,90)SUMT1,(DES1(I),I=1,N1)
    90 FORMAT(7X,F10.3,3X,7(F15.4))

END DO
CLOSE(7)

END SUBROUTINE ACELIN

SUBROUTINE ACELPROM (N2,PT2,TM2,SM2,SK2,VC2,EV2,CM2)

! ESTA SUBRUTINA DETERMINA LA RESPUESTA DE UNA ESTRUCTURA CON
! MULTIPLES GRADOS DE LIBERTAD MEDIANTE EL METODO DE ACELERACION
! PROMEDIO

USE IMSL

IMPLICIT NONE

! DECLARACION DE ARGUMENTOS

REAL,PARAMETER::DOUBLE=8
REAL,PARAMETER :: PI = 3.14152654
INTEGER,INTENT(IN):: N2
REAL,INTENT(IN)::PT2,TM2
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(N2,N2) :: SM2,SK2,CM2
REAL,INTENT(IN),DIMENSION(N2)::VC2
REAL(KIND=DOUBLE),INTENT(IN),DIMENSION(N2)::EV2
REAL(KIND=DOUBLE),DIMENSION(N2)::DES2,VEL2,ACE2, DIN2,VIN2,ACIN2,VVC2
REAL(KIND=DOUBLE),DIMENSION(N2):: ACDES,BCACE
REAL(KIND=DOUBLE),DIMENSION(N2,N2) ::A,b,X,SKK2,AC2,BC2
REAL(KIND=DOUBLE)::C1,C2,C3,SUMT2,EV,EST2,PER2
REAL,DIMENSION(N2)::VCI2
INTEGER :: NPT2,I,J
CHARACTER*14 archivo
CHARACTER*15 ruta

! CONDICIONES INICIALES

NPT2=TM2/PT2
C1=4/PT2
C2=2/PT2
C3=4/PT2**2
DO I=1,N2
    VEL2= 0.0
    ACE2= 0.0

```

```

    DES2= 0.0
  END DO
  SUMT2=0.0

  ! OBTENCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENCIAL

  SKK2= SK2 + C2*CM2 + C3*SM2
  AC2= C1*SM2 + 2*CM2
  BC2= 2*SM2

  WRITE(*,*)'INTRODUZCA EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA'
  READ(*,*) archivo
  ruta = 'C:\V\archivo
  OPEN(6,FILE=ruta)

  WRITE(6,(/,T42,A))'METODO DE ACELERACION PROMEDIO'
  WRITE(6,40)
  40 FORMAT(/,5X,'LA RESPUESTA ES:',/,12X,'TIEMPO',40X,'DESPLAZAMIENTOS'/)

  ! CALCULO PARA CADA PASO DEL TIEMPO

  VCI2=VC2
  DO J= 1,NPT2
    SUMT2= SUMT2+ PT2

    VVC2= VCI2 + MATMUL(AC2,VEL2) + MATMUL(BC2,ACE2)
    VCI2=0.0
    A =SKK2
    b = RESHAPE(VVC2,(N2,N2/))

    CALL d_lin_sol_gen (A,b,x) ! ESTA SUBROUTINA RESUELVE EL SISTEMA DE
    ! ECUACIONES

    DO I=1,N2
      DIN2(I) = x(I,1)
    END DO

    VIN2 = C2*DIN2 - 2*VEL2
    ACIN2= C3*DIN2 - C1*VEL2 - 2*ACE2
    DES2 = DES2 + DIN2
    VEL2 = VEL2 + VIN2
    ACE2 = ACE2 + ACIN2

    WRITE(6,90)SUMT2,(DES2(I),I=1,N2)
    90 FORMAT(7X,F10.3,3X,7(F15.4))

  END DO
  CLOSE(6)

  END SUBROUTINE ACELPROM

  SUBROUTINE WILSON (N3,PT3,TM3,SM3,SK3,VC3,EV3,CM3)

  ! ESTE SUBPROGRAMA DETERMINA LA RESPUESTA DE UNA ESTRUCTURA CON

```

! MULTIPLES GRADOS DE LIBERTAD MEDIANTE EL MÉTODO DE WILSON

USE IMSL

IMPLICIT NONE

! DECLARACION DE ARGUMENTOS

REAL,PARAMETER::DOUBLE=8
 REAL,PARAMETER :: PI = 3.14152654
 REAL,PARAMETER::THETA = 1.420815
 INTEGER,INTENT(IN):: N3
 REAL,INTENT(IN)::PT3, TM3
 REAL,INTENT(IN),DIMENSION(N3,N3) :: SM3,SK3,CM3
 REAL,INTENT(IN),DIMENSION(N3)::VC3
 REAL(KIND=DOUBLE),INTENT(IN),DIMENSION(N3)::EV3
 REAL(KIND=DOUBLE),DIMENSION(N3) ::DES3,VEL3,ACE3,VCT,ACIN3,VIN3
 REAL(KIND=DOUBLE),DIMENSION(N3) ::DEST, DIN3
 REAL(KIND=DOUBLE),DIMENSION(N3,N3) ::A,b,X,SKK3,AC3,BC3
 REAL(KIND=DOUBLE)::C1,C2,C3,C4,C5,C6,SUMT3,EV,PER3,EST3
 REAL,DIMENSION(N3)::VCI3
 INTEGER :: NPT3,I,J
 CHARACTER*14 archivo
 CHARACTER*15 ruta

! CONDICIONES INICIALES

NPT3=TM3/PT3
 C1=6./(PT3*THETA)
 C2=6./(PT3*THETA)**2
 C3=(PT3*THETA)/2
 C4=3/(PT3*THETA)
 C5=(PT3**2)/2
 C6=(PT3**2)/6
 DO I=1,N3
 VEL3=0.0
 ACE3=0.0
 DES3=0.0
 END DO
 SUMT3=0.0

! MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

SKK3= SK3 + C4*CM3 + C2*SM3
 AC3= C1*SM3 + 3*CM3
 BC3= 3*SM3 + C3*CM3

WRITE(*,*)'INTODUZCA EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA'
 READ(*,*) archivo
 ruta = 'C:\\\archivo
 OPEN(5,FILE=ruta)

WRITE(5,'(/,T42,A)')'METODO DE WILSON'
 WRITE(5,15)
 15 FORMAT(/,5X,'LA RESPUESTA ES:',/,16X,'TIEMPO',40X,'DESPLAZAMIENTOS'/)

! CALCULO PARA CADA PASO DE TIEMPO

```
VCI3=VC3
DO J= 1,NPT3
  SUMT3= SUMT3 + PT3
  VCT= THETA*VCI3 + MATMUL(AC3,VEL3) + MATMUL(BC3,ACE3)
  VCI3=0.0
  A=SKK3
  b = RESHAPE(VCT,(/N3,N3/))

  CALL d_lin_sol_gen (A,b,x)  ! SUBROUTINA QUE RESUELVE EL SISTEMA DE
                             ! ECUACIONES

  DO I=1,N3
    DEST(I)= X(I,1)
  END DO

  ACIN3= (C2*DEST - C1*VEL3 - 3*ACE3)/THETA
  VIN3= PT3*ACE3 + (PT3/2.0)*ACIN3
  DIN3= PT3*VEL3 + C5*ACE3 + C6*ACIN3
  DES3= DES3 + DIN3
  VEL3= VEL3 + VIN3
  ACE3 = ACE3 + ACIN3

  WRITE(5,90)SUMT3,(DES3(I),I=1,N3)
  90 FORMAT(7X,F10.3,3X,7(F15.4))

END DO
CLOSE(5)

END SUBROUTINE WILSON
```

9. RESULTADOS

A continuación se presentan mediante gráficas, los resultados del comportamiento de cada uno de los métodos en estudio, primero considerando el sistema *sin amortiguamiento*, para lo cual se efectúa la resolución del ejemplo mediante el programa propuesto; posteriormente se analiza el mismo sistema pero ahora *con amortiguamiento*, de acuerdo con la evaluación numérica realizada anteriormente para cada uno de los métodos.

Se presenta la entrada del programa y su salida correspondiente a la respuesta considerando un paso de tiempo de 0.1 s., con tiempo de estudio de 2 s., posteriormente se hace extensivo a un tiempo de 15 s. y se realiza la comparación con las respuestas generadas de manera correspondiente.

La comparación gráfica de las respuestas de cada uno de los métodos se efectuó mediante la utilización de la hoja de cálculo Excel 2003.

EJEMPLO

Un edificio idealizado con base empotrada, extremo superior libre y masas concentradas, se encuentra bajo la acción de una fuerza en su nivel superior. La fuerza aplicada al edificio en su extremo superior es de $p(t) = 1556.8 \text{ kN}$, las masas concentradas y la rigidez lateral en cada piso son de $m = 45331 \text{ kg}$ (45.331 ton.) y $k = 6223.7 \text{ kN/m}$, respectivamente. Se desea obtener la respuesta del sistema considerando pasos de tiempo $\Delta t = 0.1 \text{ seg.}$ y razón de amortiguamiento en cada piso de $\xi = 5 \%$.

Entrada de datos

| | | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--|----|--------|
| 7 | | | | | | | | NL | |
| 0.1 | 2.0 | | | | | | | PT | TMAX |
| 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | | PA | |
| 45.331 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | | |
| 0.0 | 45.331 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | | |
| 0.0 | 0.0 | 45.331 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | | |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 45.331 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | SM | |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 45.331 | 0.0 | 0.0 | | | |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 45.331 | 0.0 | | | |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 45.331 | | | |
| 12447.4 | -6223.7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | | |
| -6223.7 | 12447.4 | -6223.7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | | |
| 0.0 | -6223.7 | 12447.4 | -6223.7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | | |
| 0.0 | 0.0 | -6223.7 | 12447.4 | -6223.7 | 0.0 | 0.0 | | SK | |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | -6223.7 | 12447.4 | -6223.7 | 0.0 | | | |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -6223.7 | 12447.4 | -6223.7 | | | |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -6223.7 | 6223.7 | | | |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | VC | 1556.8 |

Salida de datos

METODO DE ACELERACION LINEAL

LA RESPUESTA ES:

| TIEMPO | DESPLAZAMIENTOS | | | | | | |
|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.100 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0016 | 0.0081 | 0.0464 |
| 0.200 | 0.0003 | 0.0007 | 0.0018 | 0.0057 | 0.0210 | 0.0813 | 0.2855 |
| 0.300 | 0.0015 | 0.0043 | 0.0122 | 0.0372 | 0.1142 | 0.3101 | 0.5908 |
| 0.400 | 0.0066 | 0.0200 | 0.0554 | 0.1468 | 0.3441 | 0.6270 | 0.8699 |
| 0.500 | 0.0252 | 0.0732 | 0.1785 | 0.3805 | 0.6611 | 0.9120 | 1.1472 |
| 0.600 | 0.0785 | 0.2043 | 0.4150 | 0.6942 | 0.9519 | 1.1768 | 1.4330 |
| 0.700 | 0.1906 | 0.4316 | 0.7196 | 0.9850 | 1.2086 | 1.4616 | 1.7115 |
| 0.800 | 0.3516 | 0.6973 | 0.9933 | 1.2307 | 1.4826 | 1.7413 | 1.9858 |
| 0.900 | 0.4893 | 0.8930 | 1.1963 | 1.4760 | 1.7553 | 2.0040 | 2.2592 |
| 1.000 | 0.5242 | 0.9680 | 1.3526 | 1.7024 | 1.9910 | 2.2617 | 2.5214 |
| 1.100 | 0.4750 | 0.9672 | 1.4495 | 1.8517 | 2.1902 | 2.4953 | 2.7634 |
| 1.200 | 0.4442 | 0.9487 | 1.4550 | 1.9165 | 2.3322 | 2.6748 | 2.9695 |
| 1.300 | 0.4710 | 0.9353 | 1.4130 | 1.9171 | 2.3815 | 2.7800 | 3.1060 |
| 1.400 | 0.4911 | 0.9374 | 1.3940 | 1.8729 | 2.3469 | 2.7847 | 3.1349 |
| 1.500 | 0.4698 | 0.9444 | 1.3945 | 1.8213 | 2.2621 | 2.6793 | 3.0312 |
| 1.600 | 0.4501 | 0.9228 | 1.3669 | 1.7726 | 2.1443 | 2.4916 | 2.8034 |
| 1.700 | 0.4460 | 0.8694 | 1.2902 | 1.6765 | 1.9901 | 2.2589 | 2.5075 |
| 1.800 | 0.4171 | 0.8027 | 1.1667 | 1.4966 | 1.7787 | 2.0039 | 2.2182 |
| 1.900 | 0.3541 | 0.7032 | 0.9990 | 1.2600 | 1.5080 | 1.7405 | 1.9724 |

METODO DE ACELERACION PROMEDIO

LA RESPUESTA ES:

| TIEMPO | | DESPLAZAMIENTOS | | | | | |
|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.100 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0010 | 0.0035 | 0.0146 | 0.0656 |
| 0.200 | 0.0004 | 0.0012 | 0.0033 | 0.0098 | 0.0310 | 0.0981 | 0.2803 |
| 0.300 | 0.0023 | 0.0068 | 0.0183 | 0.0493 | 0.1293 | 0.3065 | 0.5843 |
| 0.400 | 0.0097 | 0.0277 | 0.0687 | 0.1604 | 0.3399 | 0.6107 | 0.8756 |
| 0.500 | 0.0323 | 0.0863 | 0.1902 | 0.3747 | 0.6408 | 0.9174 | 1.1485 |
| 0.600 | 0.0867 | 0.2116 | 0.4060 | 0.6716 | 0.9524 | 1.1870 | 1.4282 |
| 0.700 | 0.1873 | 0.4147 | 0.6924 | 0.9800 | 1.2237 | 1.4532 | 1.7122 |
| 0.800 | 0.3263 | 0.6607 | 0.9791 | 1.2438 | 1.4758 | 1.7347 | 1.9872 |
| 0.900 | 0.4603 | 0.8725 | 1.2013 | 1.4674 | 1.7372 | 2.0073 | 2.2542 |
| 1.000 | 0.5310 | 0.9836 | 1.3460 | 1.6731 | 1.9854 | 2.2536 | 2.5138 |
| 1.100 | 0.5174 | 0.9931 | 1.4329 | 1.8405 | 2.1809 | 2.4752 | 2.7520 |
| 1.200 | 0.4645 | 0.9583 | 1.4676 | 1.9267 | 2.3118 | 2.6569 | 2.9478 |
| 1.300 | 0.4406 | 0.9334 | 1.4472 | 1.9284 | 2.3762 | 2.7641 | 3.0782 |
| 1.400 | 0.4631 | 0.9295 | 1.3975 | 1.8832 | 2.3620 | 2.7745 | 3.1150 |
| 1.500 | 0.4863 | 0.9288 | 1.3613 | 1.8213 | 2.2720 | 2.6873 | 3.0336 |
| 1.600 | 0.4701 | 0.9143 | 1.3411 | 1.7461 | 2.1354 | 2.5129 | 2.8348 |
| 1.700 | 0.4288 | 0.8737 | 1.2907 | 1.6467 | 1.9734 | 2.2753 | 2.5533 |
| 1.800 | 0.3946 | 0.7985 | 1.1744 | 1.5033 | 1.7782 | 2.0107 | 2.2447 |
| 1.900 | 0.3606 | 0.6904 | 1.0028 | 1.2971 | 1.5384 | 1.7472 | 1.9600 |

METODO DE WILSON

LA RESPUESTA ES:

| TIEMPO | | DESPLAZAMIENTOS | | | | | |
|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.100 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0010 | 0.0031 | 0.0110 | 0.0410 |
| 0.200 | 0.0006 | 0.0016 | 0.0040 | 0.0109 | 0.0310 | 0.0901 | 0.2565 |
| 0.300 | 0.0032 | 0.0089 | 0.0221 | 0.0544 | 0.1308 | 0.2931 | 0.5519 |
| 0.400 | 0.0129 | 0.0345 | 0.0789 | 0.1692 | 0.3349 | 0.5811 | 0.8407 |
| 0.500 | 0.0400 | 0.1001 | 0.2043 | 0.3754 | 0.6146 | 0.8764 | 1.1188 |
| 0.600 | 0.0978 | 0.2262 | 0.4087 | 0.6470 | 0.9081 | 1.1536 | 1.3985 |
| 0.700 | 0.1919 | 0.4105 | 0.6636 | 0.9308 | 1.1831 | 1.4263 | 1.6776 |
| 0.800 | 0.3072 | 0.6167 | 0.9168 | 1.1908 | 1.4443 | 1.6987 | 1.9509 |
| 0.900 | 0.4103 | 0.7920 | 1.1265 | 1.4195 | 1.6947 | 1.9603 | 2.2152 |
| 1.000 | 0.4709 | 0.9015 | 1.2779 | 1.6133 | 1.9200 | 2.2002 | 2.4638 |
| 1.100 | 0.4857 | 0.9465 | 1.3720 | 1.7585 | 2.1015 | 2.4070 | 2.6835 |
| 1.200 | 0.4768 | 0.9523 | 1.4146 | 1.8432 | 2.2260 | 2.5635 | 2.8561 |
| 1.300 | 0.4679 | 0.9435 | 1.4172 | 1.8697 | 2.2856 | 2.6517 | 2.9609 |
| 1.400 | 0.4651 | 0.9312 | 1.3956 | 1.8503 | 2.2787 | 2.6601 | 2.9800 |
| 1.500 | 0.4605 | 0.9138 | 1.3599 | 1.7967 | 2.2120 | 2.5880 | 2.9066 |
| 1.600 | 0.4464 | 0.8839 | 1.3076 | 1.7133 | 2.0957 | 2.4454 | 2.7496 |
| 1.700 | 0.4210 | 0.8341 | 1.2288 | 1.5976 | 1.9385 | 2.2507 | 2.5326 |
| 1.800 | 0.3846 | 0.7602 | 1.1168 | 1.4465 | 1.7474 | 2.0243 | 2.2852 |
| 1.900 | 0.3365 | 0.6634 | 0.9738 | 1.2634 | 1.5315 | 1.7845 | 2.0322 |

A continuación se presenta el análisis de los datos obtenidos en la resolución de este problema, para lo cual se toma como referencia el desplazamiento de la masa del extremo superior de la estructura, por ser más significativa.

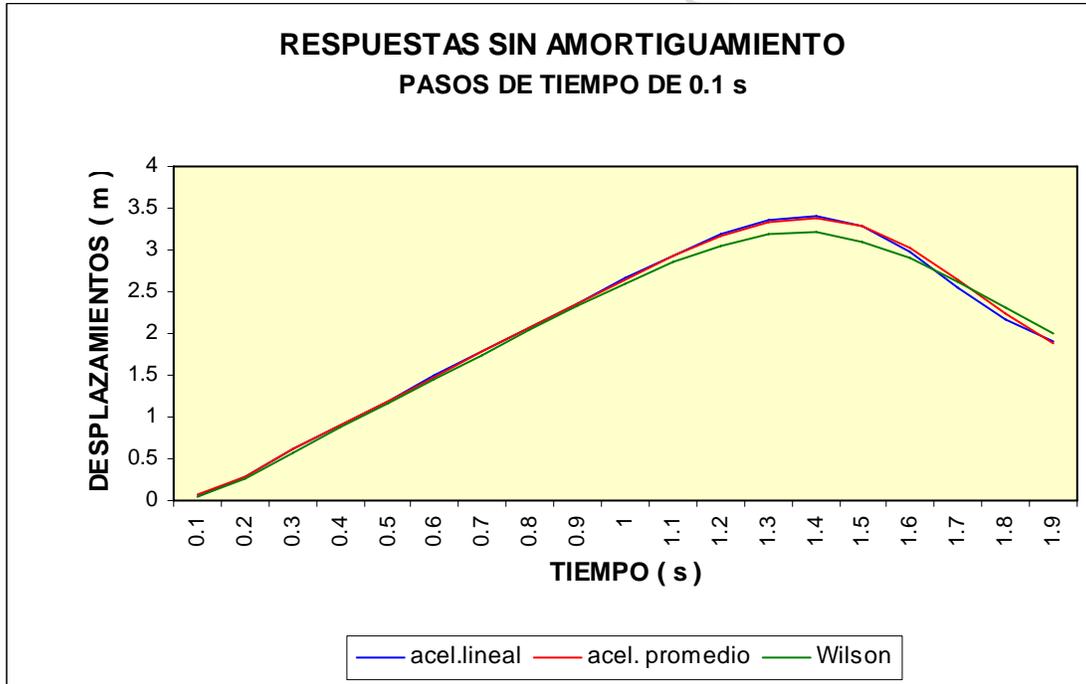


Fig.9.1. Respuestas con paso de tiempo de 0.1s. y tiempo de estudio de 2 seg.

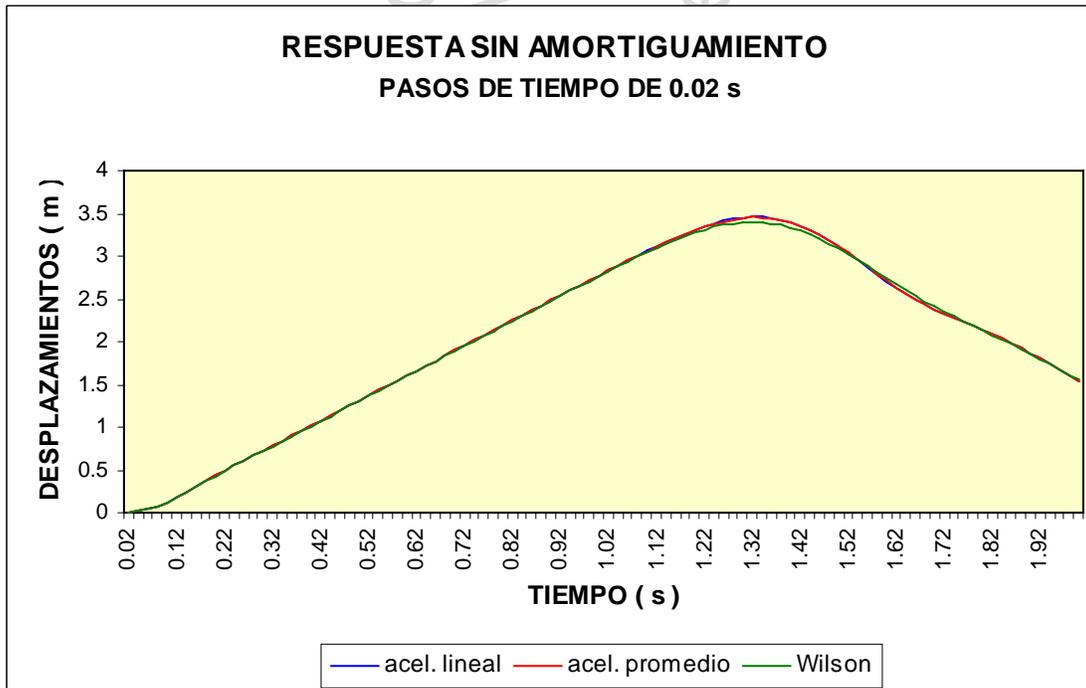


Fig.9.2. Respuestas con paso de tiempo de 0.02 s. y tiempo de estudio de 2 s.

De acuerdo a las figuras. 9.1 y 9.2 se observa que en los dos primeros segundos los métodos de aceleración lineal y aceleración promedio presentan un comportamiento similar. El método de Wilson tiene una tendencia de disminución de amplitud, sin embargo al reducir el paso de tiempo a 0.02 seg., los tres métodos tienden a comportarse de manera semejante.

Si se incrementa el tiempo de estudio a 15 seg. (fig. 9.3), los métodos de aceleración lineal y aceleración promedio se comportan en forma constante (forma propia de una vibración libre), mientras que el método de Wilson tiene una marcada reducción de amplitud (disipación de amplitud), producida por una “amortiguación numérica”, es decir, se genera una amortiguación por efectos de redondeo numérico y es independiente de la amortiguación física del sistema, según el tiempo transcurre.

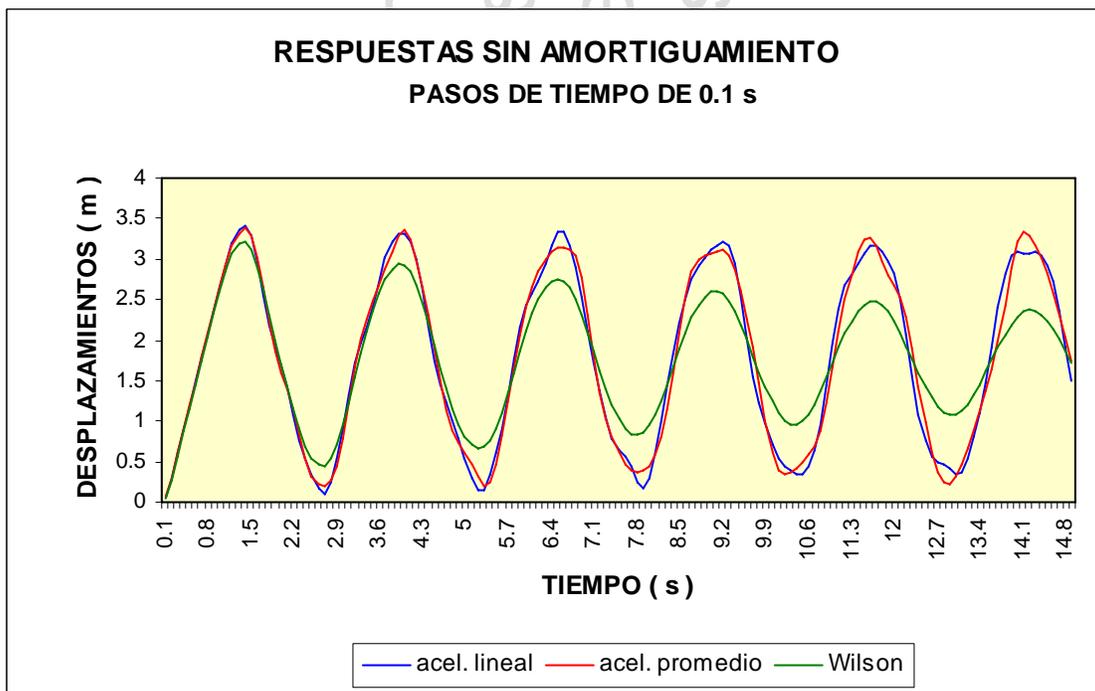


Fig.9.3. Respuestas con paso de tiempo de 0.1 s. y tiempo de estudio de 15 seg.

Al disminuir el paso de tiempo a 0.02 s. (permaneciendo el tiempo de estudio de 15 s.), el método de Wilson reduce su disipación numérica, mientras que los métodos de

aceleración lineal y aceleración promedio presentan un comportamiento muy parecido, como se puede apreciar en la figura 9.4.

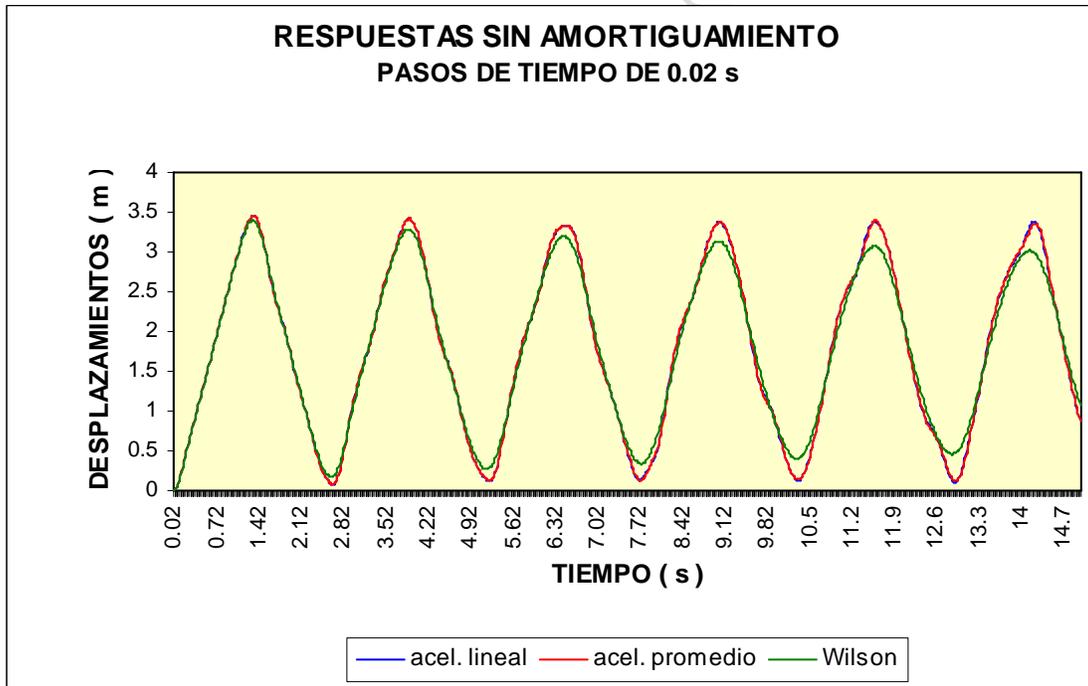


Fig. 9.4. Respuestas con paso de tiempo de 0.02 s. y tiempo de estudio de 15 s.

Si el paso de tiempo se incrementa a 0.16 s. (fig. 9.5), se observa que la curva que corresponde al método de aceleración lineal comienza a distorsionarse alrededor de los 2.5 segundos y tiende a “dispararse” alrededor de los 4 segundos transcurridos, lo que indica que dicho método se comporta de manera inestable al considerar pasos de tiempo largos. Mientras tanto, la curva correspondiente al método de Wilson presenta una marcada disminución en su amplitud y la de aceleración promedio permanece sin alteración irregular apreciable.

Como se puede apreciar, el método de aceleración lineal ofrece buenos resultados en sistemas lineales con pasos de tiempo relativamente cortos. El método de aceleración promedio se comporta de manera invariable, independientemente del tiempo considerado. En el caso del método de Wilson, se observa que presenta

resultados aceptables mientras más pequeño sea el paso de tiempo, es decir, mientras más grande sea el paso de tiempo considerado, mas marcada es la “disipación numérica”.

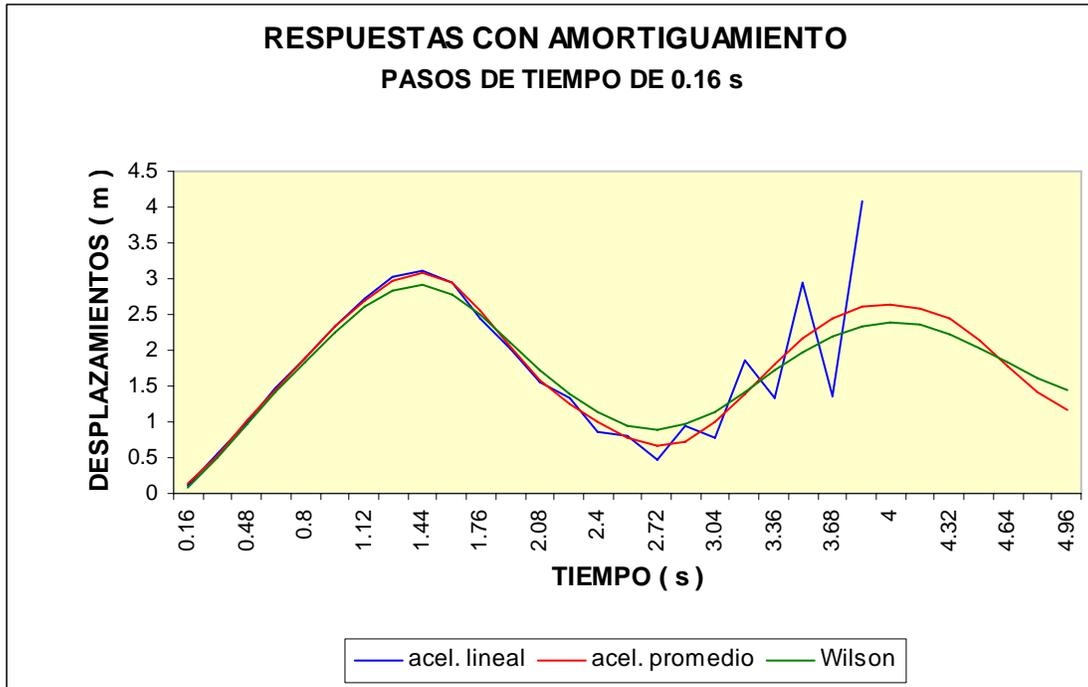


Fig. 9.5. Respuestas con paso de tiempo de 0.16 s. y tiempo de estudio de 5 s.

A continuación se analizará el comportamiento del sistema estructural cuando se le considera razón de amortiguamiento de 5 % en cada uno de sus niveles.

Cuando el sistema se encuentra amortiguado (fig. 9.6) el comportamiento de los métodos es muy similar a cuando se encuentra libre (fig. 9.1), aunque ahora se presenta una ligera disminución en su amplitud, producido por el amortiguamiento físico.

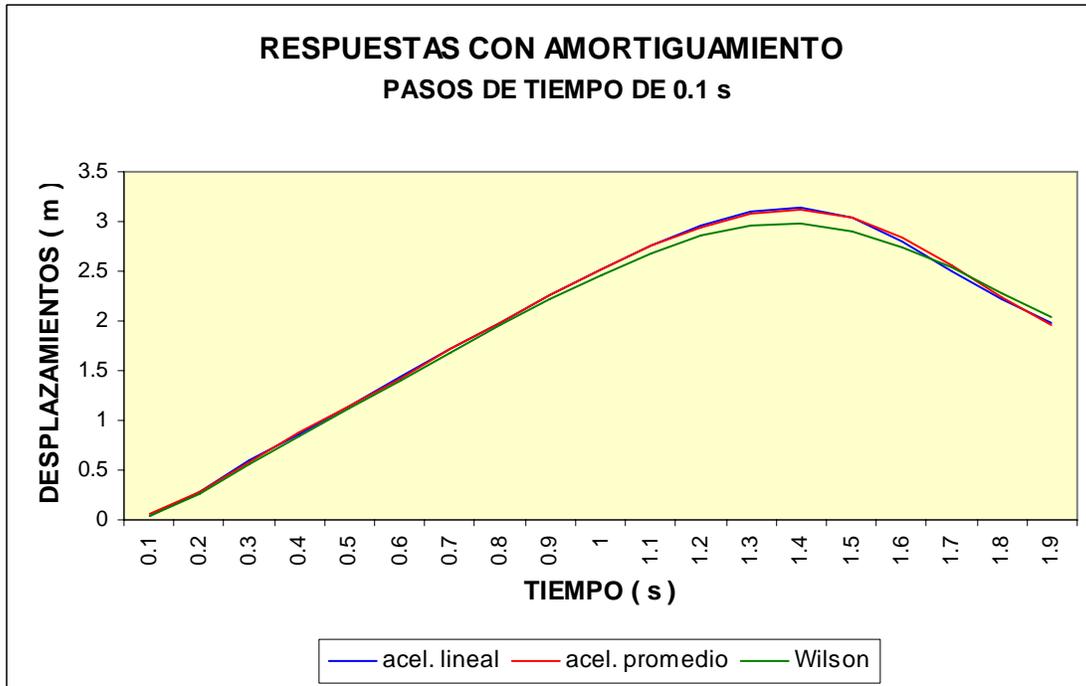


Fig. 9.6. Respuestas con paso e tiempo de 0.1 s. y tiempo de estudio de 2 s.

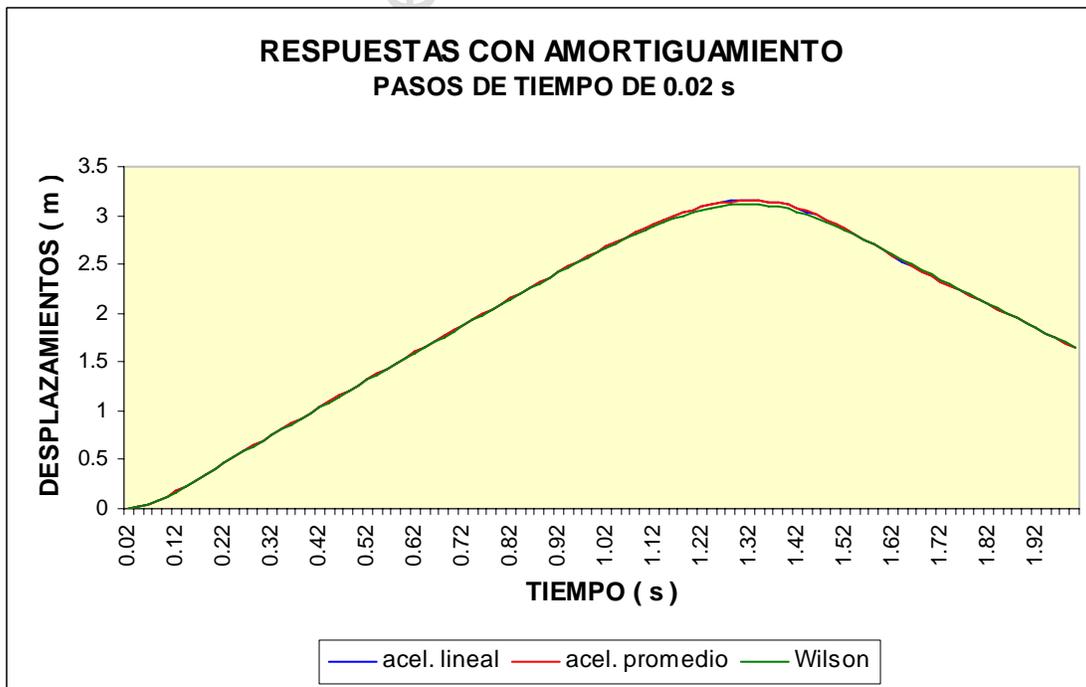


Fig. 9.7. Respuestas con paso de tiempo de 0.02 s. y tiempo de estudio de 2 s.

Al reducir el paso de tiempo a 0.02 s., los métodos adquieren un comportamiento sin diferencia apreciable entre ellos (fig. 9.7).

Si se incrementa el tiempo de estudio a 15 s. se observa que las respuestas presentan una reducción en la amplitud, siendo la reducción más rápida en el método de Wilson, ya que se suma el amortiguamiento físico con el “amortiguamiento numérico” (fig. 9.8)

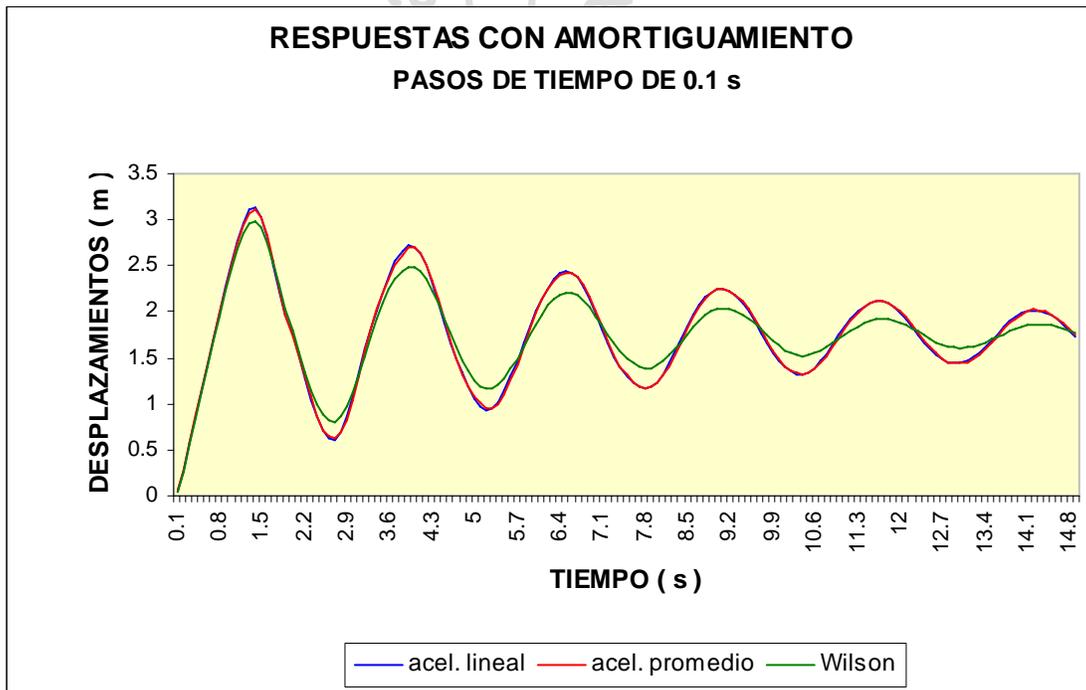


Fig. 9.8. Respuestas con pasos de tiempo de 0.1 s. y tiempo de estudio de 15 s.

Al reducir el paso de tiempo a 0.02 s., se observa que los tres métodos presentan comportamientos similares, aunque el método de Wilson presenta aún una mínima reducción de su amplitud, como se muestra en la figura 9.9.

Nótese que mientras mas pequeño sea el paso de tiempo considerado, mejor es el comportamiento de los métodos de aceleración lineal y Wilson, ya que mientras uno tiene un comportamiento más regular, el otro presenta menor disipación de amplitud.

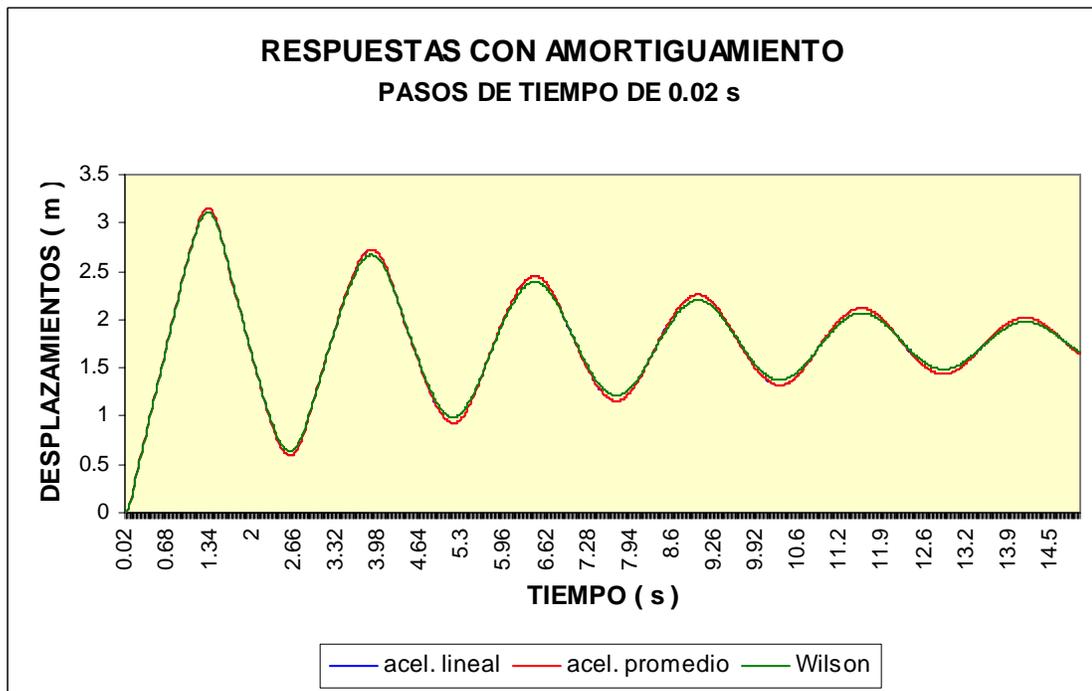


Fig. 9.9. Respuestas con pasos de tiempo de 0.02 s. y tiempo de estudio de 15 s.

Instituto de Ma
 Tesis de Ma
 Universidad V
 Ing. Francisco de J

10. CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos en este trabajo de investigación y análisis, el cual tuvo como planteamiento del problema ¿Cuál es el método numérico adecuado para la evaluación de la respuesta dinámica de una estructura con múltiples grados de libertad? Se debe mencionar que en el desarrollo del mismo se estudiaron los procedimientos numéricos más comunes para la determinación de la respuesta dinámica de una estructura con varios grados de libertad sometida a fuerzas dinámicas. Se determinaron las características, ventajas y desventajas de los métodos considerados, lo cual facilitará la elección de alguno de ellos en un problema en particular de dinámica estructural. Por otro lado, se presentaron los desarrollos de cada uno de los procedimientos mediante un ejemplo típico, con la finalidad de aclarar la aplicación de las expresiones que los conforman, sus resultados fueron comprobados mediante las subrutinas correspondientes, las cuales pueden ser incorporadas en un programa principal de análisis estructural. Así mismo, se puede concluir que mediante este análisis se pudo identificar que el método de aceleración promedio presenta mayor estabilidad en su comportamiento al utilizarlo en sistemas lineales, sin importar el tamaño del paso de tiempo considerado, proporcionando resultados más precisos; de igual forma se aprecia que el método de aceleración lineal presenta practicidad en su procedimiento proporcionando buenos resultados, sin embargo se encuentra limitado al análisis de estructuras con comportamiento estrictamente lineal utilizando pasos de tiempo muy pequeños; también se observó que en sistemas lineales el método de Wilson proporciona buenos resultados, aunque si se manejan pasos de tiempo grandes, presenta disipación numérica, lo que afecta en su precisión además de contar con un procedimiento más elaborado.

Por todo lo anterior, el objetivo general de realizar un análisis comparativo de los métodos numéricos para la selección del más adecuado en la obtención de la respuesta dinámica de estructuras con varios grados de libertad, se cumplió, ya que

se comprobó que no se trata de utilizar un procedimiento de manera aleatoria para determinar la respuesta dinámica de una estructura en particular, debido a que cada uno de los métodos tiene sus propias limitantes con base a sus particularidades; por consiguiente, es válida la hipótesis de que el análisis de los métodos numéricos por integración directa permitirá determinar el método viable en la evaluación de la respuesta dinámica de un sistema con varios grados de libertad.

Instituto de Ingeniería
Tesis de Maestría 2007
Universidad Veracruzana
Ing. Francisco de Jesús Trejo Molina

11. RECOMENDACIONES

La experiencia que ha arrojado este trabajo de tesis permite sugerir la necesidad de considerar las características del sistema estructural en estudio para proceder a seleccionar el procedimiento adecuado y de esta manera predecir el comportamiento de la estructura con mayor confiabilidad y precisión.

Los continuos avances de la ciencia y la tecnología debido a nuevas investigaciones realizadas, significa que los conocimientos sobre dinámica estructural y sus problemas inherentes no deben considerarse como una situación concluida, es por eso que este trabajo tiene la intención de sentar las bases y motivar a estudiantes de posgrado para su continuación en estudios futuros, ya sea estudiando otras alternativas de resolución; considerando la aplicación de los métodos presentados en este trabajo a sistemas no lineales; haciendo la comparación de métodos numéricos con métodos teóricos, o bien, empleando versiones de lenguaje de programación más recientes, por citar algunos ejemplos, tomando en cuenta las ventajas que ofrecen los cada vez más sofisticados equipos de computo y las nuevas técnicas en el área de las estructuras, que trae como consecuencia, la actualización constante que exige la aceleración tecnológica de nuestro tiempo.

Instituto de Ingeniería
Tesis de Maestría 2017
Universidad Veracruzana
Ing. Francisco de Jesús Tejero Molina

BIBLIOGRAFÍA

Bazán Zurita y Meli Piralla, R. (1995). Manual de Diseño Sísmico de edificios. Edit. Limusa. México.

Bazán Zurita y Meli Piralla, R. (2004). Diseño Sísmico de edificios. Edit. Limusa. México.

Bathe, K-J; Wilson, Edward L. (1976). Numerical Methods in Finite Element Analysis. Edit. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey.

Burden, Richard L. y Faires, J. Douglas. (2002). Análisis Numérico (segunda Edición). Edit Thomson. México.

Chapra, Steven C. y Canale, Raymond P. (2002). Métodos Numéricos para Ingenieros. Edit. Mc Graw Hill. México.

Chopra, Anil K.(2001). Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering. (segunda edición). Edit. Prentice hall. México.

Clough R. and Penzien J.(1993). Dynamics of structures. Edit. McGraw Hill Inc. New York.

Craig, Roy R.(1993). Structural dynamics.

Dowrick, D. J.(2001). Diseño de Estructuras Resistentes A Sismos. Edit. Limusa. México.

Martínez Patiño, E. (2001). Elaboración de textos académicos. Edit. Elías Martínez Patiño. México.

Newmark, N. M. y Rosenblueth, E. (1971). Fundamentos de Ingeniería Sísmica. Edit. Diana. México.

Paz, Mario. (1985). Structural Dynamics, Theory and computation (second edition).

Peña Pardo, B. (1993). *Apuntes de la clase: Dinámica estructural*. Impartida en el Instituto de Ingeniería Universidad Veracruzana. Veracruz, México.

Rosenblueth, E. (1992). Diseño de estructuras resistentes a sismos. Edit. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto (IMCYC). México

Schmelkes, Corina (1998). Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación (Tesis). Segunda edición. Edit. Oxford

Instituto de Ingeniería
Tesis de Maestría 2007
Universidad Veracruzana
Ing. Francisco de Jesús Trejedo Molina

ANEXOS

SIMBOLOGÍA

Símbolos Romanos

| | |
|-------------|----------------------------------------------|
| a_0, a_1 | factores de proporcionalidad arbitrarios |
| A, A' | constantes arbitrarias |
| A_1, A_2 | constantes arbitrarias |
| A | Amplitud de vibración |
| B, B' | constantes arbitrarias |
| C, C' | constantes arbitrarias |
| c | coeficiente de amortiguación |
| c_{cr} | coeficiente de amortiguación crítica |
| C | matriz de coeficientes de amortiguamiento |
| D, D' | constantes arbitrarias |
| $du(t)$ | diferencial de desplazamiento en un tiempo t |
| f_i | fuerzas inerciales |
| f_d | fuerzas de amortiguamiento |
| f_s | fuerzas de restauración elástica |
| F_I | vector de fuerzas de inercia |
| F_D | vector de fuerzas de amortiguamiento |
| F_S | vector de fuerzas elásticas |
| k | rigidez de sistemas de un grado de libertad |
| \hat{k}_n | n-ésimo coeficiente de rigidez ortonormal |
| K | matriz simétrica de rigideces |
| K^* | matriz de rigidez efectiva |
| K' | matriz diagonal de rigideces |

| | |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| m | masa de sistemas de un grado de libertad |
| m'_n | n- ésimo coeficiente de masa ortogonal |
| \hat{m}_n | n- ésimo coeficiente de masa ortonormal |
| \mathbf{M} | matriz simétrica de masas |
| \mathbf{M}' | matriz diagonal de masas |
| $p(t)$ | fuerzas que varia con el tiempo |
| $\mathbf{p}_{ef}(t)$ | vector de fuerzas efectivas que actúan sobre el sistema estructural |
| q_n | n- ésima coordenada generalizada |
| \mathbf{q}_n | n- ésimo vector de coordenadas generalizadas |
| $\mathbf{q}(t)$ | vector de desplazamientos generalizados en un tiempo t |
| $\dot{\mathbf{q}}(t)$ | vector de velocidades generalizadas en un tiempo t |
| $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ | vector de aceleraciones generalizadas en un tiempo t |
| r | raíz de ecuación algebraica |
| $r_{1,2}$ | raíces de la ecuación algebraica |
| t | tiempo arbitrario |
| T_n | periodo natural |
| u | desplazamiento, deformación |
| u_i | desplazamiento en un tiempo i |
| u_{i+1} | desplazamiento en un tiempo posterior al tiempo i |
| u_0 | desplazamiento inicial |
| u_t | desplazamiento total |
| $u(0)$ | desplazamiento en un tiempo igual a cero |
| $u(t)$ | desplazamiento en un tiempo arbitrario t |
| \mathbf{u} | vector de desplazamientos |
| \mathbf{u}_i | vector de desplazamientos en un tiempo i |
| \mathbf{u}_{i+1} | vector de desplazamientos en un tiempo posterior al tiempo i |
| \dot{u} | velocidad |
| \dot{u}_i | velocidad en un tiempo i |